ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκό Ετος 2023-2024

Ασκησεις - Φυλλαδιο 1

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Δευτέρα 4 Μαρτίου 2024

Άσκηση 1. *Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ως εξής:*

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{R}$, και να περιγράψετε το σύνολο πηλίκο $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

Άσκηση 2. *Στο σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ως εξής:*

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{Q}$, και υπάρχει μια «1-1» και «επί» απεικόνιση

$$f : \mathbb{Q}/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0,1)$$

Στην επόμενη Άσκηση θα χρειασθούμε τις ακόλουθες έννοιες. Έστω $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ μια σχέση ισοδυναμίας επί ενός συνόλου X, και υποθέτουμε ότι το σύνολο X είναι εφοδιασμένο με μια (διμελή) πράξη

$$\star \colon X \times X \longrightarrow X$$

(1) Η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ καλείται **συμβιβαστή με την πράξη** «$\star$» επί του X, αν ισχύει ότι:

$$\forall x, y, z, w \in X : \quad x \sim_{\mathcal{R}} y \ \ \& \ \ z \sim_{\mathcal{R}} w \implies x \star z \sim_{\mathcal{R}} y \star w$$

(2) Ένα στοιχείο $e \in X$ καλείται **ουδέτερο στοιχείο** για την πράξη «$\star$» επί του X, αν:

$$\forall a \in X : \quad e \star a = a = a \star e$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο για την πράξη «$\star$» επί του X, τότε αυτό είναι μοναδικό.

(3) Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e για την πράξη «$\star$» επί του X, και αν $a \in X$, τότε ένα στοιχείο $a' \in X$ καλείται **αντίστροφο** του στοιχείου a, αν:

$$a \star a' = e = a' \star a$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν υπάρχει αντίστροφο στοιχείο του a ως προς την πράξη «$\star$», τότε αυτό είναι μοναδικό.

Άσκηση 3. *Έστω ότι $\star \colon X \times X \longrightarrow X$ μια πράξη επί του συνόλου X, και έστω $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου X η οποία είναι συμβιβαστή με την πράξη «$\star$».*

1. *Ορίζοντας*

$$\widetilde{\star} : X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} \longrightarrow X/\mathcal{R}, \qquad \widetilde{\star}([x]_{\mathcal{R}}, [y]_{\mathcal{R}}) := [x]_{\mathcal{R}} \,\widetilde{\star}\, [y]_{\mathcal{R}} = [x \star y]_{\mathcal{R}}$$

αποκτούμε μια πράξη «$\widetilde{\star}$» επί του συνόλου-πηλίκο $X/\mathcal{R}$.

2. *Αν η πράξη «$\star$» επί του X είναι προσεταιριστική ή μεταθετική, τότε η πράξη «$\widetilde{\star}$» επί του $X/\mathcal{R}$ είναι προσεταιριστική ή μεταθετική αντίστοιχα.*
3. *Έστω $e \in X$ ένα ουδέτερο στοιχείο για την πράξη «$\star$» επί του X. Τότε το στοιχείο $[e]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R}$ είναι ουδέτερο στοιχείο για την πράξη «$\widetilde{\star}$» επί του $X/\mathcal{R}$.*
4. *Υποθέτουμε ότι η πράξη «$\star$» έχει ένα ουδέτερο στοιχείο $e \in X$, και έστω x ένα στοιχείο του X για το οποίο υπάρχει ένα αντίστροφο στοιχείο $x' \in X$ ως προς την πράξη «$\star$». Τότε το στοιχείο $[x']_{\mathcal{R}}$ είναι ένα αντίστροφο στοιχείο του $[x]_{\mathcal{R}}$ για την πράξη «$\widetilde{\star}$» επί του $X/\mathcal{R}$.*

Άσκηση 4. *Θεωρούμε το υποσύνολο $\mathcal{S} = \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\big\}$ του συνόλου $\mathbb{C}^*$ των μη-μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Στο $\mathbb{C}^*$ ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R}$ ως εξής:*

$$z \sim_{\mathcal{R}} w \quad \Longleftrightarrow \quad zw^{-1} \in \mathcal{S}$$

1. *Να δείξετε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{C}^*$, και ακολούθως να περιγραφεί το σύνολο-πηλίκο $\mathbb{C}^*/\mathcal{R}$.*
2. *Είναι το υποσύνολο $\mathcal{S}$ κλειστό ως προς την πράξη πολλαπλασιασμού «$\cdot$» στο σύνολο $\mathbb{C}^*$;*
3. *Είναι η πράξη πολλαπλασιασμού «$\cdot$» επί του συνόλου $\mathbb{C}^*$ συμβιβαστή με την σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$;*

Άσκηση 5. *Να εξεταστεί, ποια από τα ακόλουθα υποσύνολα τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ορίζουν μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ επί του συνόλου των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$ και για κάθε σχέση ισοδυναμίας φ να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας καθώς και η προκύπτουσα διαμέριση του συνόλου $\mathbb{Z}$:*

(1) $g_1 = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$,
(2) $g_2 = \{(z, z+1) \mid z \in \mathbb{Z}\}$,
(3) $g_3 = \{(z+1, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$,
(4) $g_4 = g_1 \cup g_2$,
(5) $g_5 = g_1 \cup g_2 \cup g_3$
(6) $g_6 = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$,
(7) $g_7 = \{(1,2), (2,3), (1,3), (2,1), (3,2), (3,1)\}$,
(8) $g_8 = g_1 \cup g_7$,
(9) $g_9 = g_1 \cup g_7 \cup \{(7,8), (8,7)\}$,
(10) $g_{10} = g_1 \cup g_7 \cup \{(3,4), (4,3)\}$.

Άσκηση 6. *Να βρεθεί το λάθος στο ακόλουθο επιχείρημα το οποίο «δείχνει» ότι κάθε συμμετρική και μεταβατική σχέση επί ενός μη-κενού συνόλου είναι σχέση ισοδυναμίας: «Έστω $\emptyset \neq X$ ένα σύνολο και $\mathcal{R}$ μια συμμετρική και μεταβατική σχέση επί του X, δηλαδή (1) $x \sim_{\mathcal{R}} y \Longrightarrow y \sim_{\mathcal{R}} x$, και (2) $x \sim_{\mathcal{R}} y$ και $y \sim_{\mathcal{R}} z \Longrightarrow x \sim_{\mathcal{R}} z$. Επειδή η σχέση $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική και $x \sim_{\mathcal{R}} y$, έπεται ότι $y \sim_{\mathcal{R}} x$. Επειδή η σχέση $\mathcal{R}$ είναι μεταβατική, έπεται ότι $x \sim_{\mathcal{R}} x$. Άρα η σχέση $\mathcal{R}$ είναι ανακλαστική, και επομένως είναι σχέση ισοδυναμίας».*

Μπορείτε να διορθώσετε το λάθος;

Άσκηση 7. *Στην παρούσα Άσκηση ζητείται η εύρεση παραδειγμάτων από τα οποία να προκύπτει ότι κανένα αξίωμα στον ορισμό μιας σχέσης ισοδυναμίας δεν προκύπτει από τα άλλα δύο αξιώματα.*

(1) *Να βρεθεί σχέση επί κατάλληλου συνόλου η οποία είναι ανακλαστική και συμμετρική αλλά όχι μεταβατική.*
(2) *Να βρεθεί σχέση επί κατάλληλου συνόλου η οποία είναι συμμετρική και μεταβατική αλλά όχι ανακλαστική.*
(3) *Να βρεθεί σχέση επί κατάλληλου συνόλου η οποία είναι ανακλαστική και μεταβατική αλλά όχι συμμετρική.*

Άσκηση 8. *Έστω X ένα μη-κενό σύνολο και $\{\mathcal{R}_i\}_{i \in I}$ μια συλλογή σχέσεων ισοδυναμίας επί του X.*

1. *Να δείξετε ότι η τομή $\mathcal{R} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X.*

2. *Να εξετάσετε αν η ένωση* $\mathcal{R}' = \bigcup_{i\in I} \mathcal{R}_i$ *είναι σχέση ισοδυναμίας επί του* X.

Άσκηση 9. *Για κάθε θετικό ακέραιο* n, *θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \quad x \sim_{\mathcal{R}_n} y \iff n \mid x - y$$

επί του συνόλου $\mathbb{Z}$ *των ακεραίων. Αν* n, m *είναι θετικοί ακέραιοι, να περιγραφεί η σχέση ισοδυναμίας*

$$\mathcal{R}_n \cap \mathcal{R}_m$$

Άσκηση 10. *Θεωρούμε το σύνολο* $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. *Έστω η σχέση*

$$\mathcal{R} = \{(1,1),\ (2,1),\ (3,1),\ (2,4),\ (4,2),\ (3,3),\ (4,1),\ (2,3)\} \quad \subseteq \quad X \times X$$

Να βρεθεί η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας $\langle\mathcal{R}\rangle$ *επί του* X *η οποία περιέχει τη σχέση* $\mathcal{R}$.

2. *Έστω η σχέση*

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,3), (4,1)\} \quad \subseteq \quad X \times X$$

Να βρεθεί η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας $\langle\mathcal{R}\rangle$ *επί του* X *η οποία περιέχει τη σχέση* $\mathcal{R}$.

Άσκηση 11. *Να περιγραφούν όλες οι πιθανές σχέσεις ισοδυναμίας επί ενός συνόλου* X *με πλήθος στοιχείων* $|X| = 1$, $|X| = 2$, $|X| = 3$, *και* $|X| = 4$.

Άσκηση 12. *Έστω* $\mathcal{R}_1$ *και* $\mathcal{R}_2$ *δύο σχέσεις επί ενός συνόλου* X.

1. *Αν οι σχέσεις* $\mathcal{R}_1$ *και* $\mathcal{R}_2$ *είναι ανακλαστικές, να δειχθεί ότι η σχέση* $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ *είναι ανακλαστική.*

2. *Αν οι σχέσεις* $\mathcal{R}_1$ *και* $\mathcal{R}_2$ *είναι συμμετρικές, να δειχθεί ότι η σχέση* $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ *είναι συμμετρική.*

3. *Αν οι σχέσεις* $\mathcal{R}_1$ *και* $\mathcal{R}_2$ *είναι μεταβατικές, να δειχθεί ότι η σχέση* $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ *<u>δεν</u> είναι απαραίτητα μεταβατική.*

Άσκηση 13. *Έστω* $\mathcal{R}$ *και* $\mathcal{S}$ *δύο σχέσεις ισοδυναμίας επί ενός συνόλου* X. *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η σχέση* $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ *είναι σχέση ισοδυναμίας επί του* X.

2. $\forall a \in X$: *είτε* $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{S}}$ *είτε* $[a]_{\mathcal{S}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$.

Άσκηση 14. *Έστω* X *ένα μη κενό σύνολο και υποθέτουμε ότι*

$$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{n} \quad \text{και} \quad \mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^{m}$$

είναι διαμερίσεις του X. *Να δειχθεί ότι η συλλογή υποσυνόλων*

$$\mathcal{C} = \{A_i \cap B_j\}_{i,j=1}^{n,m}$$

είναι μια διαμέριση του X.

Άσκηση 15. **1.** *Στο σύνολο* $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, *όπου* $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, *ορίζουμε μια σχέση* $\mathcal{R}$ *ως εξής:*

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : \qquad (a,b) \sim_{\mathcal{R}} (c,d) \iff a + d = b + c$$

Δείξτε ότι η $\mathcal{R}$ *είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του* $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ *και ακολούθως περιγράψτε το σύνολο πηλίκο* $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/\mathcal{R}$.

2. *Στο σύνολο* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$*, όπου* $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*, ορίζουμε μια σχέση* $\mathcal{S}$ *ως εξής:*

$$\forall (x,y),\ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : \quad (x,y) \sim_{\mathcal{S}} (a,b) \quad \Longleftrightarrow \quad xb = ya$$

Δείξτε ότι η $\mathcal{S}$ *είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *και ακολούθως περιγράψτε το σύνολο πηλίκο* $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\mathcal{S}$.

Άσκηση 16. *Θεωρούμε το σύνολο* $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})$ *των ακολουθιών Cauchy ρητών αριθμών*[1]*. Στο σύνολο* $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})$ *ορίζουμε μια σχέση* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{CS}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{CS}(\mathbb{Q})$ *ως εξής:*

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{\mathcal{R}} (r'_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{η ακολουθία } (r_n - r'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ είναι μηδενική: } \varinjlim (r_n - r'_n) = 0$$

(1) *Να δειχθεί ότι η* $\mathcal{R}$ *είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί τού* $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})$.
(2) *Να περιγραφεί το σύνολο πηλίκο* $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})/\mathcal{R}$.

Άσκηση 17. *Έστω* $\mathbb{K}$ *ένα σώμα (*$\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$*), και έστω* $H(t)$ *ένα τυχόν πολυώνυμο υπεράνω του* $\mathbb{K}$*. Στο σύνολο των πολυωνύμων* $\mathbb{K}[t]$*, ορίζουμε μια σχέση* $\mathcal{R}$ *ως εξής:*

$$\forall\ P(t), Q(t) \in \mathbb{K}[t] : \quad P(t) \sim_{\mathcal{R}} Q(t) \quad \Longleftrightarrow \quad H(t) \mid P(t) - Q(t)$$

(1) *Να δείξετε ότι η σχέση* $\mathcal{R}$ *είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του* $\mathbb{K}[t]$.
(2) *Να εξετασθεί αν η σχέση* $\mathcal{R}$ *είναι συμβιβαστή με τις πράξης πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πολυωνύμων.*
(3) *Αν* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *και* $H(t) = t^2 + 1$*, ποιό είναι το σύνολο πηλίκο* $\mathbb{R}[t]/\mathcal{R}$*;*

Άσκηση 18. *Εξετάστε στις παρακάτω περιπτώσεις αν, η διμελής πράξη «*$\star$*» επί του συνόλου* G *είναι προσεταιριστική, μεταθετική, υπάρχει ουδέτερο στοιχείο και αν, κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο.*

(1) $G = \mathbb{Z}$ *και* $a \star b = ab$.
(2) $G = \mathbb{Z}$ *και* $a \star b = a - b$.
(3) $G = \mathbb{R}^+$ *και* $a \star b = ab$.
(4) $G = \mathbb{Q}$ *και* $a \star b = ab$.
(5) $G = \mathbb{R}^*$ *και* $a \star b = ab$.
(6) $G = \mathbb{Z}^+$ *και* $a \star b = 2^{ab}$.
(7) $G = \mathbb{Z}^+$ *και* $a \star b = a^b$.
(8) $G = \mathbb{C}$ *και* $a \star b = a + b$.

Άσκηση 19. *Έστω* $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *(δηλαδή* G *είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών εκτός από το* -1*), και ορίζουμε*

$$\forall x, y \in G : \qquad x \star y = x + y + xy$$

(1) *Να δείξετε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι μια διμελής πράξη επί του* G.
(2) *Να εξετασθεί αν η πράξη* $\star$ *είναι προσεταιριστική ή μεταθετική.*
(3) *Να εξετασθεί αν υπάρχει στοιχείο* $e \in G$ *έτσι ώστε:* $x \star e = x = e \star x$, $\forall x \in G$*. Αν ένα τέτοιο στοιχείο* e *υπάρχει, είναι μοναδικό;*
(4) *Στην περίπτωση κατά την οποία ένα στοιχείο* e *όπως στο (3) υπάρχει και είναι μοναδικό, να εξετασθεί αν για κάθε* $x \in G$*, υπάρχει* $y \in G$ *έτσι ώστε:* $x \star y = e = y \star x$.
(5) *Τέλος να εξετασθεί αν η εξίσωση:*

$$a \star x = b$$

έχει (μοναδική) λύση στο σύνολο G.

---

[1]Υπενθυμίζουμε ότι μια ακολουθία $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ρητών αριθμών καλείται **ακολουθία Cauchy** αν:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall m, n \geq n_0 \implies |r_n - r_m| < \epsilon.$$

Άσκηση 20. *Έστω ότι $\mathbb{K}$ συμβολίζει ένα από τα ακόλουθα σώματα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, και έστω $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$. Υπενθυμίζουμε ότι δύο πίνακες $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ καλούνται* **ισοδύναμοι** *αν υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P και αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας Q έτσι ώστε:*

$$Q^{-1} \cdot A \cdot P = B$$

(1) *Δείξτε ότι ορίζοντας:*

$$A \sim_{\mathcal{R}} B \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ο πίνακας } A \text{ είναι ισοδύναμος με τον } B$$

αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(2) *Να περιγραφεί το σύνολο πηλίκο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})/\sim_{\mathcal{R}}$.*

(3) *Είναι η πρόσθεση, και ο πολλαπλασιασμός πινάκων (όταν $m = n$), συμβιβαστή πράξη με την σχέση ισοδυναμίας πινάκων;*