

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2023-2024

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html>

Πέμπτη 21 Μαρτίου 2024

Άσκηση 1. Έστω ότι το ζεύγος (G, \star) είναι ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e και θεωρούμε στοιχεία $a, b, c \in G$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) $a \star b \star c = e$.
- (2) $b \star c \star a = e$.
- (3) $c \star a \star b = e$.

Αν ικανοποιείται μια από τις παραπάνω σχέσεις, να δειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα ότι γενικά $a \star c \star b \neq e$.

Άσκηση 2. Έστω (G, \star) μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e . Αν το σύνολο G έχει άρτιο πλήθος στοιχείων, να δειχθεί ότι υπάρχει ένα στοιχείο $a \neq e$ στην G τέτοιο ώστε: $a \star a = e$.

Υποθέτουμε ότι

$$\star: G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto a \star b$$

είναι μια προσεταιριστική πράξη ορισμένη επί του μη-κενού συνόλου G .

Ένα στοιχείο $e \in G$ καλείται **αριστερό ουδέτερο στοιχείο** για την πράξη « \star » αν: $e \star a = a, \forall a \in G$. Το στοιχείο $e \in G$ καλείται **δεξιό ουδέτερο στοιχείο** για την πράξη « \star » αν: $a \star e = a, \forall a \in G$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ των μη-μηδενικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε μια διμελή πράξη $\star: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ επί του \mathbb{R}^* , ως εξής:

$$a \star b := |a|b$$

- (1) Να δειχθεί ότι η πράξη « \star » προσεταιριστική.
- (2) Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα αριστερό ουδέτερο στοιχείο και ένα δεξιό αντίστροφο στοιχείο για την πράξη « \star ».
- (3) Είναι το ζεύγος (\mathbb{R}^*, \star) ομάδα;
- (4) Ποιά είναι η σημασία της άσκησης;

Άσκηση 4. Έστω ότι το ζεύγος (G, \star) είναι ομάδα με ταυτοτικό στοιχείο e . Αν ισχύει

$$x \star x = e, \quad \forall x \in G$$

να δειχθεί ότι η ομάδα (G, \star) είναι αβελιανή. Να δοθεί παράδειγμα αβελιανής ομάδας (G, \star) η οποία περιέχει στοιχείο x έτσι ώστε $x \star x \neq e$.

Άσκηση 5. Να δειχθεί ότι το ανοιχτό διάστημα $(-1, 1) := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ της πραγματικής ευθείας αποτελεί αβελιανή ομάδα με πράξη:

$$x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

Άσκηση 6. Έστω ότι το ζεύγος (G, \star) είναι ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e . Αν το σύνολο G έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, να δειχθεί ότι για κάθε $a \in G$, υπάρχει ακέραιος $n \in \mathbb{N}$, ο οποίος γενικά εξαρτάται από το a , έτσι ώστε: $a^n := a \star a \star \dots \star a = e$ (το a εμφανίζεται σαν παράγοντας n φορές). Επιπλέον να δειχθεί ότι:

$$\exists N \in \mathbb{N} : a^N = e, \quad \forall a \in G$$

Άσκηση 7. Έστω ότι το ζεύγος (G, \star) είναι ομάδα και $a, b \in G$. Να δειχθεί ότι:

$$(a \star b)^{-1} = a^{-1} \star b^{-1} \iff a \star b = b \star a$$

Να συμπεράνετε ότι η ομάδα (G, \star) είναι αβελιανή αν και μόνον αν $\forall a, b \in G: (a \star b)^{-1} = a^{-1} \star b^{-1}$.

Έστω M ένα σύνολο και $\star: M \times M \rightarrow M$, $(a, b) \mapsto a \star b$, μια διμελής πράξη ορισμένη επί του M . Υπενθυμίζουμε ότι το ζεύγος (M, \star) καλείται **μονοειδές**, αν:

- (1) Η πράξη « \star » είναι προσεταιριστική.
- (2) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e \in G$ για την πράξη « \star ».

Το μονοειδές (M, \star) καλείται **μεταθετικό μονοειδές** αν η πράξη « \star » είναι μεταθετική.

Άσκηση 8. Έστω ότι το ζεύγος (M, \star) είναι ένα μονοειδές με ουδέτερο στοιχείο e .

- (1) Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(U(M), \star)$, όπου

$$U(M) = \{x \in M \mid \exists x' \in M : x \star x' = e = x' \star x\}$$

είναι το σύνολο των αντιστρεψίμων στοιχείων του μονοειδούς (M, \star) , είναι ομάδα.

Επιπλέον να δειχθεί ότι αν το μονοειδές (M, \star) είναι μεταθετικό, τότε η ομάδα $(U(M), \star)$ είναι αβελιανή.

- (2) Να βρεθούν οι ομάδες $(U(\mathbb{N}), \cdot)$, $(U(\mathbb{Z}), \cdot)$ και $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ των μονοειδών (\mathbb{N}, \cdot) , (\mathbb{Z}, \cdot) , και (\mathbb{Z}_n, \cdot) , όπου « \cdot » είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός.
- (3) Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$, όπου

$$(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

είναι ένα μεταθετικό μονοειδές και να προσδιοριστεί η αβελιανή ομάδα $(U(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}), \star)$.

Άσκηση 9. Βρείτε όλους τους πιθανούς πίνακες Cayley ομάδων με πλήθος στοιχείων ίσο με 4.

Άσκηση 10. Να δειχθεί με ένα παράδειγμα, ότι είναι δυνατόν η εξίσωση $x \star x = e$ να έχει περισσότερες από δύο λύσεις, σε μια ομάδα (G, \star) με ταυτοτικό στοιχείο e .

Άσκηση 11. Θεωρούμε τους ακόλουθους αντιστρέψιμους πίνακες πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_4(\mathbb{R}) \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$$

και έστω

$$G = \{A^n \in \text{GL}_4(\mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{και} \quad G' = \{B^n \in \text{GL}_4(\mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Να δειχθεί ότι τα ζεύγη (G, \cdot) και (G', \cdot) , όπου « \cdot » είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός πινάκων, είναι αβελιανές ομάδες. Πόσα στοιχεία έχουν οι ομάδες G και G' ;

Άσκηση 12. Μελετήστε τη δομή της ομάδας $(\mathbb{Z}_6, +)$, και συμπληρώστε τον πίνακα Cayley

+	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[0]_6$						
$[1]_6$						
$[2]_6$						
$[3]_6$						
$[4]_6$						
$[5]_6$						

Άσκηση 13. Θεωρούμε το σύνολο απεικονίσεων

$$G = \left\{ \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3 : \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\} \right\}$$

όπου:

$$\begin{aligned} \alpha_0(x) &= x, & \alpha_1(x) &= \frac{1}{1-x}, & \alpha_2(x) &= \frac{x-1}{x} \\ \beta_1(x) &= \frac{1}{x}, & \beta_2(x) &= 1-x, & \beta_3(x) &= \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

Να δειχθεί ότι το ζεύγος (G, \circ) , όπου « \circ » είναι πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων, αποτελεί μια μη-αβελιανή ομάδα. Να συμπληρωθεί ο αντίστοιχος πίνακας Cayley της ομάδας (G, \star) .

Άσκηση 14. Έστω ότι « \star » είναι μια προσεταιριστική πράξη επί του μη-κενού συνόλου G . Υποθέτουμε ότι:

- (1) Υπάρχει ένα στοιχείο¹ $e \in G$: $e \star x = x$, $\forall x \in G$.
- (2) Για κάθε $x \in G$, υπάρχει ένα στοιχείο² $x' \in G$: $x' \star x = e$.

Να δειχθεί ότι το ζεύγος (G, \star) είναι ομάδα.

Άσκηση 15. Γνωρίζουμε ότι αν (G, \star) είναι μια ομάδα, τότε οι εξισώσεις

$$a \star x = b \quad \text{και} \quad x \star a = b$$

έχουν (μοναδική) λύση για κάθε $a, b \in G$.

Αντίστροφα: να δειχθεί ότι αν « \star » είναι μια προσεταιριστική πράξη επί του μη-κενού συνόλου G και οι παραπάνω εξισώσεις έχουν λύση για κάθε $a, b \in G$, τότε υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e \in G$ για την πράξη « \star » και το ζεύγος (G, \star) είναι μια ομάδα.

Άσκηση 16. 1. Στο σύνολο $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ορίζουμε μια πράξη « \star » ως εξής:

$$\star : G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \star (c, d) = (ac, ad + b)$$

Να δειχθεί ότι το ζεύγος (G, \star) είναι ομάδα.

2. Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$G' = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \}$$

εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων είναι ομάδα.

3. Παρατηρείτε κάποια σχέση μεταξύ των ομάδων, G και G' ;

¹Ένα στοιχείο $e \in G$ έτσι ώστε $e \star x = x$, $\forall x \in G$, καλείται **αριστερό ουδέτερο στοιχείο** για την πράξη « \star ».

²Αν για την προσεταιριστική πράξη « \star » επί του συνόλου G υπάρχει αριστερό ουδέτερο στοιχείο e , τότε ένα στοιχείο $x' \in G$ έτσι ώστε $x' \star x = e$, καλείται **αριστερό αντίστροφο στοιχείο** του x για την πράξη « \star ».

Άσκηση 17. Έστω (M, \star_1) και (M_2, \star_2) δύο μονοειδή. Ναδειχθεί ότι ορίζοντας:

$$(m_1, m_2) \star (n_1, n_2) = (m_1 \star_1 n_1, m_2 \star_2 n_2)$$

το ζεύγος $(M_1 \times M_2, \star)$ είναι ένα μονοειδές, το οποίο καλείται **μονοειδές ευθύ γινόμενο** των (M, \star_1) και (M, \star_2) . Επιπλέον ναδειχθούν τα εξής:

- (1) Το μονοειδές $(M_1 \times M_2, \star)$ είναι μεταθετικό αν και μόνον αν τα μονοειδή (M_1, \star_1) και (M_2, \star_2) είναι μεταθετικά.
- (2) Για τις αντίστοιχες ομάδες των αντιστρέψιμων στοιχείων έχουμε:

$$U(M_1 \times M_2, \star) = U(M_1, \star_1) \times U(M_2, \star_2)$$

- (3) Το μονοειδές $(M_1 \times M_2, \star)$ είναι ομάδα αν και μόνον αν τα μονοειδή (M_1, \star_1) και (M_2, \star_2) είναι ομάδες.

Άσκηση 18. Έστω (M, \star) ένα μεταθετικό μονοειδές με ουδέτερο στοιχείο e . Στο μονοειδές ευθύ γινόμενο $(M \times M, \star)$ ορίζουμε την ακόλουθη σχέση \mathcal{R} :

$$(m_1, n_1) \sim_{\mathcal{R}} (m_2, n_2) \iff \exists x \in M : m_1 \star n_2 \star x = n_1 \star m_2 \star x$$

- (1) Ναδειχθεί ότι η σχέση \mathcal{R} είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $M \times M$.
- (2) Αν $G(M) = (M \times M) / \mathcal{R}$ είναι το επαγόμενο σύνολο πηλίκο του $M \times M$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας \mathcal{R} , ναδειχθεί ότι ορίζοντας

$$[(m_1, n_1)]_{\mathcal{R}} \star [(m_2, n_2)]_{\mathcal{R}} = [(m_1 \star m_2, n_1 \star n_2)]_{\mathcal{R}}$$

αποκτούμε μια αβελιανή ομάδα $(G(M), \star)$, με ουδέτερο στοιχείο $[(e, e)]_{\mathcal{R}}$ η οποία καλείται η **ομάδα Grothendieck** του μεταθετικού μονοειδούς (M, \star) .

Μια απεικόνιση $f: (M_1, \star_1) \rightarrow (M_2, \star_2)$ μεταξύ μονοειδών (M_1, \star_1) και (M_2, \star_2) με ουδέτερα στοιχεία e_1 και e_2 αντίστοιχα, καλείται **ομομορφισμός μονοειδών**, αν, $\forall x, y \in M_1$:

$$f(e_1) = e_2 \quad \text{και} \quad f(x \star_1 y) = f(x) \star_2 f(y)$$

Ένας ομομορφισμός μονοειδών ο οποίος είναι απεικόνιση «1-1», αντίστοιχα «επί», αντίστοιχα «1-1» και «επί», καλείται **μονομορφισμός**, αντίστοιχα **επιμορφισμός**, αντίστοιχα **ισομορφισμός μονοειδών**.

Παρόμοια μια απεικόνιση $f: (G_1, \star_1) \rightarrow (G_2, \star_2)$ μεταξύ ομάδων (G_1, \star_1) και (G_2, \star_2) , καλείται **ομομορφισμός ομάδων**, αν, $\forall x, y \in G_1$:

$$f(x \star_1 y) = f(x) \star_2 f(y)$$

Ένας ομομορφισμός ομάδων ο οποίος είναι απεικόνιση «1-1», αντίστοιχα «επί», αντίστοιχα «1-1» και «επί», καλείται **μονομορφισμός**, αντίστοιχα **επιμορφισμός**, αντίστοιχα **ισομορφισμός ομάδων**.

Αν υπάρχει ένας ισομορφισμός $f: (G_1, \star_1) \rightarrow (G_2, \star_2)$ μεταξύ μονοειδών ή ομάδων (G_1, \star_1) και (G_2, \star_2) , τότε θα λέμε ότι τα μονοειδή ή ομάδες (G_1, \star_1) και (G_2, \star_2) είναι ισόμορφα και θα γράφουμε

$$(G_1, \star_1) \cong (G_2, \star_2)$$

Άσκηση 19. Έστω $f: (G_1, \star_1) \rightarrow (G_2, \star_2)$ μεταξύ μονοειδών με ουδέτερα στοιχεία e_1 και e_2 , για την οποία ισχύει ότι $f(x \star_1 y) = f(x) \star_2 f(y)$, $\forall x, y \in G_1$.

- (1) Ναδειχθεί, με ένα αντιπαράδειγμα, ότι γενικά η απεικόνιση f δεν είναι ομομορφισμός μονοειδών.
- (2) Αν η απεικόνιση f είναι «επί», ναδειχθεί ότι η απεικόνιση f είναι ομομορφισμός μονοειδών.
- (3) Αν το μονοειδές (G, \star_2) είναι ομάδα, ναδειχθεί ότι η απεικόνιση f είναι ομομορφισμός μονοειδών.

Άσκηση 20. Θεωρούμε ένα μεταθετικό μονοειδές (M, \star) και έστω $(G(M), \star)$ η ομάδα Grothendieck του (M, \star) , βλ. Άσκηση 18. Ναδειχθούν τα εξής:

(1) Η απεικόνιση

$$\iota: M \longrightarrow G(M), \quad \iota(m) = [(m, e)]_{\mathcal{R}}$$

είναι ομομορφισμός μονοειδών, ο οποίος είναι μονομορφισμός μονοειδών αν και μόνον αν, $\forall m, n, x \in M$:

$$m \star x = n \star x \implies m = n$$

(2) Αν (G, \star') είναι μια αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e και $f: M \longrightarrow G$ είναι ένας ομομορφισμός μονοειδών, να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $f^*: G(M) \longrightarrow G$ έτσι ώστε $f^* \circ \iota = f$:

Άσκηση 21. Θεωρούμε τα μεταθετικά μονοειδή $(\mathbb{N}_0, +)$ και (\mathbb{N}_0, \cdot) , και (\mathbb{N}, \cdot) . Να δειχθεί ότι:

$$G(\mathbb{N}_0, +) \cong (\mathbb{Z}, +) \quad \text{και} \quad G(\mathbb{N}_0, \cdot) = \{[(1, 1)]_{\mathcal{R}}\}$$

Άσκηση 22. (Θεώρημα Cayley για Μονοειδή). Έστω (M, \star) ένα μονοειδές με ουδέτερο στοιχείο e . Θεωρούμε το μονοειδές $(\text{Map}(M), \circ)$, όπου

$$\text{Map}(M) = \{f: M \longrightarrow M \mid f: \text{απεικόνιση}\}$$

και « \circ » είναι η σύνθεση απεικονίσεων. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$R: (M, \star) \longrightarrow (\text{Map}(M), \circ), \quad m \longmapsto R(m) := R_m: M \longrightarrow M, \quad R_m(x) = m \star x$$

είναι ένας μονομορφισμός μονοειδών.