ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκο Ετος 2023-2024

Ασκησεις - Φυλλαδιο 3

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Πέμπτη 28 Μαρτίου 2024

Υπενθυμίζουμε ότι μια ομάδα $(G,\cdot)$ καλείται **κυκλική** αν υπάρχει ένα στοιχείο $a \in G$ έτσι ώστε η G συμπίπτει με την κυκλική υποομάδα $\langle a\rangle = \big\{a^n \in G \mid n \in \mathbb{Z}\big\}$ της G η οποία παράγεται από το a.

Σε μια κυκλική ομάδα G, κάθε στοιχείο $a \in G$ με την ιδιότητα $G = \langle a\rangle$ καλείται **γεννήτορας** της G.

Άσκηση 1. *Αν $n \geq 1$ είναι ένας φυσικός αριθμός, να δειχθεί ότι το σύνολο U_n των n-οστών ριζών της μονάδας, δηλαδή*

$$\mathsf{U}_n = \big\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\big\}$$

αποτελεί υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ των μη-μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Ακολούθως να δειχθεί ότι η ομάδα $(\mathsf{U}_n,\cdot)$ είναι κυκλική τάξης n.

Παρατήρηση. (1) *Η ομάδα T καλείται η* **ομάδα του κύκλου**.

(2) *Ένας μιγαδικός αριθμός z καλείται n-***οστή ρίζα της μονάδας***, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος, αν $z^n = 1$.*

*Μια n-***οστή ρίζα της μονάδας** *z καλείται* **πρωταρχική** *n-***οστή ρίζα της μονάδας***, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος, αν $z^m \neq 1$, για κάθε $m < n$.*

(3) *Η ομάδα U_n καλείται η ομάδα των n-***οστών ριζών της μονάδας**.

(4) *Η ομάδα $\mathsf{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{U}_n$ καλείται η* **ομάδα των ριζών της μονάδας**.

Άσκηση 2. (1) *Ας είναι T το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με μέτρο ίσο με 1, δηλαδή*

$$\mathsf{T} = \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\big\}$$

Να δειχθεί ότι το T αποτελεί υποομάδα τής ομάδας $(\mathbb{C}^\star,\cdot)$.

(2) *Να δείξετε ότι το υποσύνολο U των μιγαδικών αριθμών z με $z^n = 1$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή*

$$\mathsf{U} = \big\{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} :\ z^n = 1\big\}$$

αποτελεί υποομάδα τής $(\mathsf{T},\cdot)$.

(3) *Να δείξετε ότι: (α) η ομάδα $(\mathsf{U}_n,\cdot)$ είναι υποομάδα της ομάδας $(\mathsf{U},\cdot)$, (β) ισχύει ότι $\mathsf{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{U}_n$, και (γ) η ομάδα U δεν είναι κυκλική.*

Άσκηση 3. *Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα. Να δειχθεί ότι αν η ομάδα G είναι πεπερασμένη, τότε κάθε υποομάδα της είναι πεπερασμένη και η τάξη κάθε στοιχείου της είναι πεπερασμένη.*

Να δοθεί παράδειγμα άπειρης ομάδας, κάθε στοιχείο της οποίας έχει πεπερασμένη τάξη.

Άσκηση 4. *Για κάθε μια από τις παρακάτω ομάδες να βρεθούν τουλάχιστον δύο μη-τετριμμένες γνήσιες υποομάδες.*

(1) $(\mathbb{Z}, +)$,	(3) $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$,	(5) $(\mathsf{S}_3, \circ)$,
(2) $(\mathbb{Q}, +)$,	(4) $(8\mathbb{Z}, +)$,	(6) $(\mathsf{GL}(2, \mathbb{Q}), \cdot)$.

Άσκηση 5. *Να προσδιορισθεί η κυκλική υποομάδα $\langle A \rangle$ της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$ η οποία παράγεται από τον πίνακα A, όπου A είναι ένας εκ των πινάκων:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι οι κυκλικές υποομάδες $\langle A \rangle$ υποομάδες της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathsf{GL}(2, \mathbb{Z})$;

Άσκηση 6.
(1) *Δείξτε ότι αν H και K είναι δύο υποομάδες μιας αβελιανής ομάδας $(G, \cdot)$, τότε το υποσύνολο*
$$H \cdot K = \big\{ h \cdot k \in G \mid h \in H \ \& \ k \in K \big\}$$
είναι μια υποομάδα της G.
(2) *Να αποδείξετε με τη βοήθεια ενός αντιπαραδείγματος ότι ο ισχυρσιμός του (1) δεν αληθεύει όταν η ομάδα $(G, \cdot)$ δεν είναι αβελιανή.*
(3) *Έστω $n, m \geq 1$ δύο φυσικοί αριθμοί και $H = n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ και $K = m\mathbb{Z} = \langle m \rangle$ οι κυκλικές υποομάδες της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$, οι οποίες παράγονται από τους φυσικούς αριθμούς n και m αντίστοιχα. Να προσδιορισθεί η ομάδα $H + K$.*

Άσκηση 7. *(1) Να δειχθεί ότι κάθε μη-κενό πεπερασμένο υποσύνολο H μιας ομάδας G το οποιο είναι κλειστό στην πράξη της ομάδας είναι υποομάδα της G.*

(2) Να δειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα ότι γενικά το παραπάνω αποτέλεσμα δεν ισχύει αν το υποσύνολο είναι άπειρο.

Άσκηση 8. *Έστω η ομάδα*
$$\mathsf{S}(A) = \big\{ f \colon A \longrightarrow A \mid \eta \ \ f \ \ \text{είναι «1-1» και «επί»} \big\}$$
των μεταθέσεων, δηλαδή των «1-1» και «επί» απεικονίσεων, επί ενός μη κενού συνόλου A, με πράξη την σύνθεση «$\circ$» απεικονίσεων. Αν X είναι ένα πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του A, να δειχθεί ότι το υποσύνολο
$$H = \big\{ f \in \mathsf{S}(A) \mid f(X) \subseteq X \big\}$$
είναι μια υποομάδα της $\mathsf{S}(A)$.

Αληθεύει ο ισχυρισμός αν το υποσύνολο X είναι άπειρο;

Άσκηση 9. *Έστω $(G, \cdot)$ μια αβελιανή ομάδα με ταυτοτικό στοιχείο e. Ας είναι $n \in \mathbb{N}$ ένας σταθερά δοσμένος φυσικός αριθμός. Να δειχθεί ότι το υποσύνολο*
$$G_n = \big\{ g \in G \mid g^n = e \big\}$$
της G το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία $g \in G$ με την ιδιότητα $g^n = e$ είναι μια υποομάδα της G.

Ισχύει το παραπάνω αποτέλεσμα αν η ομάδα δεν είναι αβελιανή; Αν ισχύει να το αποδείξετε, διαφορετικά να δώσετε αντιπαράδειγμα.

Άσκηση 10.
(1) *Αν H και K είναι υποομάδες μιας ομάδας G, να δειχθεί ότι η ένωση $H \cup K$ είναι υποομάδα της G αν και μόνον αν είτε $H \subseteq K$ είτε $K \subseteq H$.*
(2) *Δεν υπάρχει ομάδα η οποία είναι ένωση δύο γνήσιων υποομάδων της.*
(3) *Υπάρχει ομάδα η οποία είναι ένωση τριών γνήσιων υποομάδων της;*

Άσκηση 11. *Σημειώστε αν είναι σωστό ή λάθος.*

(1) *Ο προσεταιριστικός νόμος ισχύει σε κάθε ομάδα.*
(2) *Είναι δυνατόν να υπάρξει ομάδα στην οποία να μην ισχύει ο νόμος της διαγραφής.*
(3) *Κάθε ομάδα είναι υποομάδα του εαυτού της.*
(4) *Κάθε ομάδα έχει ακριβώς δύο μη γνήσιες υποομάδες.*
(5) *Σε κάθε κυκλική ομάδα, κάθε στοιχείο είναι γεννήτορας.*
(6) *Στο μάθημα, δεν έχουμε δώσει ακόμα παράδειγμα ομάδας που να μην είναι αβελιανή.*
(7) *Κάθε σύνολο αριθμών που είναι ομάδα με πράξη την πρόσθεση είναι και ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό.*
(8) *Μπορούμε να ορίσουμε την υποομάδα ως «υποσύνολο μιας ομάδας».*
(9) *Η $(\mathbb{Z}_4, +)$ είναι κυκλική ομάδα.*
(10) *Κάθε υποσύνολο οποιασδήποτε ομάδας είναι υποομάδα με την επαγόμενη πράξη.*

Άσκηση 12. *Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα, και $\mathcal{H} = \big\{H_i \mid H_i \leq G\big\}_{i \in I}$ μια οικογένεια υποομάδων της G, όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών.*

(1) *Να δειχθεί ότι η τομή*
$$H = \bigcap_{i \in I} H_i$$
είναι μια υποομάδα της G.

(2) *Έστω $n, m \geq 1$ δύο φυσικοί αριθμοί και*
$$H_1 = n\mathbb{Z} = \langle n \rangle \qquad \& \qquad H_2 = m\mathbb{Z} = \langle m \rangle$$
οι κυκλικές υποομάδες της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$, οι οποίες παράγονται από τους φυσικούς αριθμούς n και m αντίστοιχα. Να προσδιορισθεί η ομάδα $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$.

Άσκηση 13. *Έστω ότι $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ είναι δύο ομάδες. Να δειχθεί ότι το καρτεσιανό γινόμενο $G_1 \times G_2$ εφοδιασμένο με την πράξη*
$$\star : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \longrightarrow G_1 \times G_2, \qquad ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \longmapsto (a_1 \star_1 b_1, a_2 \star_2 b_2)$$
αποτελεί μια ομάδα. (Η συγκεκριμένη ομάδα ονομάζεται το **<u>ευθύ γινόμενο</u>** *των ομάδων G_1 και G_2.)*

Άσκηση 14. *Έστω ότι $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ είναι δύο ομάδες, και θεωρούμε την ομάδα ευθύ γινόμενο, όπως στην Άσκηση 13. Αν*
$$H = G_1 \times \{e_2\} = \big\{(g_1, e_2) \in G_1 \times G_2 \mid g_1 \in G_1\big\} \quad \text{και} \quad K = \{e_1\} \times G_2 = \big\{(e_1, g_2) \in G_1 \times G_2 \mid g_2 \in G_2\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι*
$$H \;\leq\; G_1 \times G_2 \qquad \text{και} \qquad K \;\leq\; G_1 \times G_2$$
(2) $H \bigcap K = \big\{e_{G_1 \times G_2}\big\} = \big\{(e_1, e_2)\big\}$.
(3) $H \star K = K \star H = G_1 \times G_2$.
(4) *Να δειχθεί ότι $\forall h \in H$, $\forall k \in K$, $\forall g \in G_1 \times G_2$:*
$$g \star h \star g^{-1} \;\in\; H \qquad \text{και} \qquad g \star k \star g^{-1} \;\in\; K$$

Άσκηση 15. *Θεωρούμε την ομάδα ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ της προσθετικής ομάδας $(\mathbb{Z}_2, +)$ με τον εαυτό της, βλέπε Άσκηση 13. Να σχηματιστεί ο πίνακας Cayley της $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ και να αποδειχτεί ότι δεν πρόκειται για κυκλική ομάδα.*

Άσκηση 16. *Θεωρούμε τις ομάδες* $(\mathbb{Z}_2, +)$, $(\mathbb{Z}_3, +)$ *και το ευθύ γινόμενό τους* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. *Να σχηματιστεί ο πίνακας Cayley της ομάδας ευθύ γινόμενο* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ *και να αποδειχτεί ότι πρόκειται για κυκλική ομάδα. Ακολούθως να εξετάσετε, αν ο ισχυρισμός*

«***Σε κάθε κυκλική ομάδα, κάθε στοιχείο είναι γεννήτορας***»

είναι αληθής ή όχι.

Άσκηση 17. *Να προσδιοριστούν όλοι οι γεννήτορες της ομάδας* $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.

Άσκηση 18. *Θεωρούμε το σύνολο* $G = \{e, a, b, c, d, f\}$. *Να συμπληρωθεί ο ακόλουθος πίνακας έτσι ώστε να αποτελεί τον πίνακα Cayley μιας αβελιανής ομάδας* $(G, \cdot)$.

$\cdot$	**e**	**a**	**b**	**c**	**d**	**f**
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	f			b
b	b		c		a	
c	c		e	b		a
d	d	c			b	
f	f					c

Είναι η ομάδα η οποία προκύπτει κυκλική;

Άσκηση 19. (1) *Να δειχθεί ότι κάθε κυκλική ομάδα είναι αβελιανή,*
(2) *Να δειχθεί ότι υπάρχουν αβελιανές ομάδες οι οποίες δεν είναι κυκλικές.*
(3) *Να δοθεί παράδειγμα μιας μη-αβελανής ομάδας με την ιδιότητα ότι κάθε γνήσια υποομάδα της είναι κυκλική.*

Άσκηση 20. *Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο της συμμετρικής ομνάδας* $(\mathsf{S}_4, \circ)$:

$$G = \{\iota,\ \ \rho_1,\ \ \rho_2,\ \ \rho_3,\ \ \delta_1,\ \ \delta_2,\ \ \mu_1,\ \ \mu_2\}$$

όπου:

$$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \ \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ \ \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \ \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \ \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \ \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ \ \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο G *είναι μια μη-αβελιανή υποομάδα της* S_4 *και κάθε γνήσια υποομάδα της είναι αβελιανή αλλά όχι απαραίτητα κυκλική.*

Άσκηση 21. *Να δειχθεί ότι μια ομάδα η οποία δεν έχει γνήσιες μη τετριμμένες υποομάδες είναι κυκλική.*

Άσκηση 22. *Έστω* H *ένα μη-κενό υποσύνολο μιας ομάδας* $(G, \cdot)$. *Να δειχθεί ότι το* H *είναι υποομάδα της* G *αν και μόνον αν η ακόλουθη σχέση:*

$$\forall a, b \in H: \quad a \sim_H b \quad \Longleftrightarrow \quad ab^{-1} \in H$$

είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο H.

Άσκηση 23. *Έστω* $(G, \cdot)$ *μια κυκλική ομάδα και* a *ένας γεννήτορας της* G*, δηλαδή* $G = \langle a \rangle$*. Να δείξετε ότι και το στοιχείο* a^{-1} *είναι γεννήτορας της* G*. Ακολούθως να δείξετε ότι μια ομάδα* G *έχει ακριβώς έναν γεννήτορα αν και μόνον αν είτε η* G *είναι η τετριμμένη ομάδα ταξης* 1 *είτε η* G *είναι η κυκλική ομάδα τάξης* 2.

Άσκηση 24. *Έστω* $(G, \cdot)$ *μια κυκλική ομάδα. Τότε το πλήθος των γεννητόρων της* G *είναι άρτιο αν και μόνον αν* $|G| \geq 3$.