ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκο Ετος 2023-2024

Ασκησεις - Φυλλαδιο 4

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Πέμπτη 4 Απριλίου 2024

Άσκηση 1. *Να ευρεθεί η τάξη τού στοιχείου a της ομάδας $(G, \star)$, όπου:*

(1) $a = [2]_3, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_3, +)$,
(2) $a = -i, \quad (G, \star) = (\mathbb{C}^\star, \cdot)$,
(3) $a = -1 + i\sqrt{3}, \quad (G, \star) = (\mathbb{C}^\star, \cdot)$,
(4) $a = (-1 + i\sqrt{3})/2, \quad (G, \star) = (\mathbb{C}^\star, \cdot)$,
(5) $\cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7), \quad (G, \star) = (\mathbb{C}^\star, \cdot)$.
(6) $a = [6]_{10}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{10}, +)$,
(7) $a = [6]_{15}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{15}), +)$,
(8) $a = [10]_{12}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{12}), +)$,
(9) $a = [77]_{210}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{210}), +)$,
(10) $a = [40]_{210}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{210}), +)$,
(11) $a = [70]_{210}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{210}), +)$.

Άσκηση 2. *Έστω ότι $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα. Να αποδείξετε ότι:*

1. $\forall x, a \in G$:
$$\mathsf{o}(x^{-1}ax) = \mathsf{o}(a) = \mathsf{o}(xax^{-1})$$
2. $\forall a, b \in G$:
$$\mathsf{o}(ab) = \mathsf{o}(ba)$$
3. *Αν H είναι μια υποομάδα της G, τότε $\forall x \in G$, το σύνολο $x^{-1}Hx$ είναι μια υποομάδα της G με τάξη*
$$\mathsf{o}(x^{-1}Hx) = \mathsf{o}(H)$$

Άσκηση 3. *Βρείτε το πλήθος των γεννητόρων μιας κυκλικής ομάδας με τάξη:*

(α') 5, **(β')** 8, **(γ')** 12, **(δ')** 60

Άσκηση 4. **1.** *Οι γεννήτορες της κυκλικής πολλαπλασιαστικής ομάδας U_n όλων των n-στών ριζών της μονάδας στο $\mathbb{C}$ καλούνται* **πρωταρχικές n-οστές ρίζες της μονάδας**.
Βρείτε τις πρωταρχικές n-οστές ρίζες της μονάδας για $n = 4$, $n = 17$, $n = 24$, και $n = 31$.
2. *Να ευρεθούν όλοι οι γεννήτορες των ομάδων $(\mathbb{Z}_{10}, +)$, $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ και $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.*

Άσκηση 5. 1. *Βρείτε το πλήθος των στοιχείων της κυκλικής υποομάδας $\langle [25]_{30} \rangle$ της ομάδας $(\mathbb{Z}_{30}, +)$.*
2. *Βρείτε το πλήθος των στοιχείων της κυκλικής υποομάδας $\langle [30]_{42} \rangle$ της ομάδας $(\mathbb{Z}_{42}, +)$.*
3. *Βρείτε το πλήθος των στοιχείων της κυκλικής υποομάδας $\langle i \rangle$ της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{C}^*$ των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών.*
4. *Βρείτε το πλήθος των στοιχείων της κυκλικής υποομάδας $\langle 1 + i \rangle$ της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{C}^*$ των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών.*

Άσκηση 6. *Ποιες είναι οι δυνατές τάξεις για τις υποομάδες των επόμενων κυκλικών ομάδων;*

(α′) $(\mathbb{Z}_6, +)$, **(β′)** $(\mathbb{Z}_8, +)$, **(γ′)** $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, **(δ′)** $(\mathbb{Z}_{60}, +)$, **(ε′)** $(\mathbb{Z}_{17}, +)$

Άσκηση 7. *Βρείτε όλες τις υποομάδες των παρακάτω ομάδων και σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της.*

(α′) $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, **(β′)** $(\mathbb{Z}_{36}, +)$, **(γ′)** $(\mathbb{Z}_8, +)$

Άσκηση 8. *Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα και θεωρούμε το ακόλουθο σποσύνολο της G:*

$$F(G) = \{x \in G \mid \mathsf{o}(x) < \infty\}$$

(1) *Αν η ομάδα G είναι αβελιανή, να δειχθεί ότι το υποσύνολο $F(G)$ είναι μια υποομάδα της G.*
(2) *Αν η ομάδα G δεν είναι αβελοανή, να δειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα ότι το υποσύνο $F(G)$ δεν είναι υποομάδα της G.*
(3) *Να βρεθεί η υποομάδα $F(\mathbb{C}^*)$.*
(4) *Αν η ομάδα G είναι πεπερασμένη, τότε $F(G) = G$. Αν $F(G) = G$, να δειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα ότι η ομάδα G δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένη.*

Άσκηση 9. *Έστω ότι $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ είναι μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα.*

1. *Δείξτε ότι:* **(α)** $(g_1 g_2 \cdots g_n)^2 = e$ *και* **(β)** $\forall g \in G$: $g^n = e$.[1]
2. *Τι συμβαίνει αν η τάξη της G είναι περιττός αριθμός;*

Άσκηση 10. *Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα η οποία ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:*[2]

Αν H, K είναι οποιεσδήποτε υποομάδες της G, τότε: είτε $H \subseteq K$ ή $K \subseteq H$

Να δειχθεί ότι η G είναι κυκλική ομάδα που η τάξη της ισούται με τη δύναμη ενός πρώτου αριθμού.

Άσκηση 11. *Θεωρούμε την ομάδα $(\mathsf{U}(\mathbb{Z}_{20}), \cdot)$ των αντιστρέψιμων κλάσεων ισοδυναμίας των ακεραίων* mod 20 *με πράξη τον πολλαπλασιασμό κλάσεων ισοτιμίας* mod 20. *Στην παρούσα Άσκηση $[\cdot]$ συμβολίζει $[\cdot]_{20}$.*

1. *Να δειχθεί ότι*
$$\mathsf{U}(\mathbb{Z}_{20}) = \{[1], [3], [7], [9], [11], [13], [17], [19]\}$$
2. *Να δειχθεί ότι για κάθε στοιχείο $u \in \mathsf{U}(\mathbb{Z}_{20})$ ισχύει: $u^8 = [1]$.*
3. *Είναι η ομάδα $(\mathsf{U}(\mathbb{Z}_{20}), \cdot)$ κυκλική;*
4. *Να λυθεί ως προς x η εξίσωση $[17]^{(-108)} \cdot x \cdot [7]^{333} = [3]^{-1}$ στην ομάδα $\mathsf{U}(\mathbb{Z}_{20})$.*

Άσκηση 12. *Να δειχθεί ότι μια ομάδα η οποία διαθέτει ακριβώς δύο υποομάδες είναι κυκλική τάξης p, όπου p είναι ένας πρώτος αριθμός.*

Άσκηση 13. *Έστω ότι $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα και a, b είναι δύο στοιχεία της έτσι ώστε $ab = ba$. Αν οι τάξεις $\mathsf{o}(a), \mathsf{o}(b)$ είναι πεπερασμένες και $(\mathsf{o}(a), \mathsf{o}(b)) = 1$, τότε να δειχθεί ότι η τάξη του στοιχείου ab ισούται με $\mathsf{o}(a) \cdot \mathsf{o}(b)$:*

$$\max\{\mathsf{o}(a), \mathsf{o}(b)\} < \infty \quad \& \quad (\mathsf{o}(a), \mathsf{o}(b)) = 1 \quad \& \quad ab = ba \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{o}(ab) = \mathsf{o}(a) \cdot \mathsf{o}(b)$$

[1] Θα δούμε αργότερα, με χρήση του Θεωρήματος Lagrange, ότι $g^n = e$ για κάθε στοιχείο g σε μια πεπερασμένη ομάδα G, όχι απαραίτητα αβελιανή.

[2] μια τέτοια ομάδα καλείται **μονοσειριακή** (uniserial)

Άσκηση 14. *Έστω ότι $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα και H, K δύο κυκλικές υποομάδες της G.*

1. *Αν η G είναι αβελιανή και $|H| = 10$ και $|K| = 14$, να δειχθεί ότι η G διαθέτει μια υποομάδα L τάξης $|L| = 70$.*
2. *Αν $|H| = 14$ και $|K| = 15$, να περιγραφεί η υποομάδα $H \cap K$.*

Άσκηση 15.

1. *Έστω ότι G είναι μια κυκλική ομάδα τάξης n. Για κάθε διαιρέτη $m \mid n$, να προσδιορισθεί το πλήθος των στοιχείων της G με τάξη m.*
2. *Δείξτε ότι, με εξαίρεση δύο, όλες οι κυκλικές ομάδες έχουν άρτιο πλήθος γεννητόρων.*

Άσκηση 16.

1. *Έστω ότι p και q είναι πρώτοι αριθμοί. Βρείτε το πλήθος των γεννητόρων της κυκλικής ομάδας $\mathbb{Z}_{pq}$ καθώς και το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της.*
2. *Έστω ότι p είναι ένας πρώτος αριθμός. Βρείτε το πλήθος των γεννητόρων της κυκλικής ομάδας $\mathbb{Z}_{p^r}$, όπου $r \geq 1$, καθώς και το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της.*

Άσκηση 17.

1. *Να δειχθεί ότι ότι η ομάδα $(\mathbb{Q}, +)$ των ρητών αριθμών με πράξη την συνήθη πρόσθεση δεν είναι κυκλική ομάδα.*
2. *Να δειχθεί ότι η ομάδα των πραγματικών αριθμών $(\mathbb{R}, +)$ με πράξη την συνήθη πρόσθεση δεν είναι κυκλική ομάδα.*

Άσκηση 18. *Σημειώστε αν κάθε ένας από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστός (Σ) ή λανθασμένος (Λ), δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.*

(1) *Κάθε κυκλική ομάδα είναι αβελιανή.*
(2) *Κάθε αβελιανή ομάδα είναι κυκλική*
(3) *Κάθε στοιχείο μιας κυκλικής ομάδας παράγει την ομάδα.*
(4) *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει τουλάχιστον μια αβελιανή ομάδα με τάξη n.*
(5) *Κάθε ομάδα τάξης ≤ 4 είναι κυκλική.*
(6) *Για κάθε στοιχείο $[a]_{20}$ της $\mathbb{Z}_{20}$ που είναι γεννήτορας, υπάρχει ένα στοιχείο $b \in [a]_{20}$, το οποίο είναι πρώτος αριθμός.*
(7) *Η συμμετρική ομάδα S_3 είναι κυκλική ομάδα.*
(8) *Όλες οι υποομάδες της S_3 είναι κυκλικές.*
(9) *Κάθε κυκλική ομάδα τάξης > 2 έχει τουλάχιστον δυο διαφορετικούς γεννήτορες.*

Άσκηση 19. *Στις παρακάτω προτάσεις, δώστε παράδειγμα ομάδας με την ιδιότητα που περιγράφεται ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει τέτοιο παράδειγμα.*

(1) *Μια πεπερασμένη ομάδα η οποία δεν είναι κυκλική.*
(2) *Μια άπειρη ομάδα η οποία δεν είναι κυκλική.*
(3) *Μια κυκλική ομάδα η οποία έχει μόνο έναν γεννήτορα.*
(4) *Μια άπειρη κυκλική ομάδα η οποία έχει τέσσερις γεννήτορες.*
(5) *Μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα η οποία έχει τέσσερις γεννήτορες.*

Άσκηση 20. *Δείξτε ότι μια ομάδα η οποία έχει πεπερασμένο πλήθος υποομάδων είναι πεπερασμένη ομάδα.*

Άσκηση 21. *Θεωρούμε το σύνολο*

$$H = \big\{D(a,b,c) \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\big\}, \qquad \text{όπου} \qquad D(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο H είναι μια υποομάδα της ειδικής γραμμικής ομάδας $\mathsf{SL}(3,\mathbb{R}) = \{A \in \mathsf{GL}(3,\mathbb{R}) \mid |A| = 1\}$ *και ακολούθως να βρεθούν όλα τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης στην* H.