ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκο Ετος 2023-2024

Ασκησεις - Φυλλαδιο 5

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Πέμπτη 11 Απριλίου 2024

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τις ακόλουθες (κυκλικές) υποομάδες της* S_3*:*

$$H = \big\langle (2\ 3) \big\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \& \quad K = \big\langle (1\ 2\ 3) \big\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Να βρεθούν οι δεξιές και αριστερές πλευρικές κλάσεις (δεξιά και αριστερά σύμπλοκα) των υποομάδων H*,* K *στην* S_3*.*

Άσκηση 2.

1. *Να ευρεθούν οι πλευρικές κλάσεις (τα σύμπλοκα) της υποομάδας* $\langle 5 \rangle = 5\mathbb{Z}$ *στην ομάδα* $(\mathbb{Z}, +)$*.*
2. *Να ευρεθούν οι πλευρικές κλάσεις (τα σύμπλοκα) της υποομάδας* $\langle 9 \rangle = 9\mathbb{Z}$ *στην ομάδα* $(\mathbb{Z}, +)$ *και της* $\langle 9 \rangle = 9\mathbb{Z}$ *στην (υπο)ομάδα* $\langle 3 \rangle = 3\mathbb{Z}$ *της* $(\mathbb{Z}, +)$*.*
3. *Να ευρεθούν οι πλευρικές κλάσεις (τα σύμπλοκα) της υποομάδας* $\langle [6]_{12} \rangle$ *στην ομάδα* $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ *και της* $\langle [6]_{12} \rangle$ *στην (υπο)ομάδα* $\langle [2]_{12} \rangle$ *της* $(\mathbb{Z}_{12}, +)$*.*

Άσκηση 3. *Έστω η ομάδα* $(\mathbb{Z}_{12}, +)$*. Θεωρούμε την ομάδα ευθύ γινόμενο* $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}, +)$[1]*, και έστω* $\mathcal{V}$ *το ακόλουθο υποσύνολο τής* $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$*:*

$$\mathcal{V} = \big\{ ([a]_{12}, [b]_{12}) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \ \mid \ \textit{όπου:}\ 3 \mid a \ \ \& \ \ 3 \mid b \big\}$$

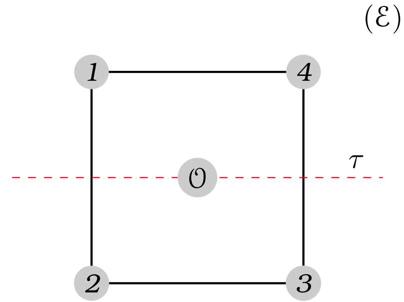
Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{V}$ *είναι μια υποομάδα τής* $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$ *και υπολογίστε τον δείκτη* $[\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} : \mathcal{V}]$*.*

Άσκηση 4. *Θεωρούμε ένα τετράγωνο* T *στο επίπεδο* $(\mathcal{E})$*, και έστω* $\mathcal{O}$ *το σημείο τομής των διαγωνίων του. Έστω* $\rho, \tau \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *οι απεικονίσεις του επιπέδου, όπου (βλέπε το παρακάτω σχήμα):*

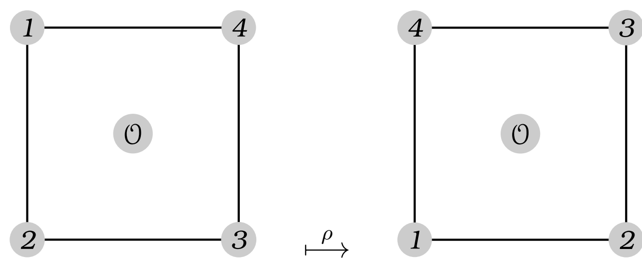
1. ρ *είναι η στροφή κατά* $\pi/2$ *(με φορά αντίθετη της φοράς που ακολουθούν οι δείκτες του ρολογιού) του επιπέδου* $(\mathcal{E})$ *γύρω από τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του τετραγώνου και διέρχεται από το κέντρο συμμετρίας του* $\mathcal{O}$*, βλέπε το παρακάτω* Σχημα *2.*
   και
2. τ *είναι η στερεά κίνηση (συμμετρία) που προκύπτει από ανάκλαση του επιπέδου ως προς άξονα συμμετρίας ο οποίος διέρχεται από τα μέσα δύο παράλληλων πλευρών του τετραγώνου, βλέπε το παρακάτω* Σχημα *1.*

---

[1] Υπενθυμίζουμε ότι η πράξη «+» τής $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$ ορίζεται ως $([a]_{12}, [b]_{12}) + ([a']_{12}, [b']_{12}) = ([a + a']_{12}, [b + b']_{12})$.



Σχήμα 1. Ανάκλαση τ τετραγώνου ως προς άξονα συμμετρίας ο οποίος διέρχεται από τα μέσα δύο παράλληλων πλευρών του τετραγώνου



Σχήμα 2. Στροφή (με φορά αντίθετη της φορά τοων δεικτών του ρολογιού) ρ του τετραγώνου κατά γωνία $\pi/2$.

ΕΦοδιάζουμε το σύνολο D_4 *με τη σύνθεση* $\circ$ *απεικονίσεων και γράφουμε απλούστερα* $\rho\tau$ *αντί* $\rho\circ\tau$, ρ^2 *αντί* $\rho\circ\rho$, *κλπ. Να δειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις* $\tau^2=\iota,\ \rho^4=\iota,\ \rho\tau=\tau\rho^3$, *όπου* ι *είναι η ταυτοτική απεικόνιση του επιπέδου* $\mathcal{E}$, *και το σύνολο*

$$\mathsf{D}_4=\left\{\iota,\ \rho,\ \rho^2,\ \rho^3,\ \tau,\ \tau\rho,\ \tau\rho^2,\ \tau\rho^3\right\}$$

αποτελεί μια μη-αβελιανή ομάδα τάξης 8, *η οποία καλείται η* **διεδρική ομάδα** D_4 *των συμμετριών του τετραγώνου.*

Να υπολογιστούν οι αριστερές πλευρικές κλάσεις (τα αριστερά σύμπλοκα) της $\langle\tau\rangle$ *στην* D_4.

Άσκηση 5. *Έστω ότι* $(G,\cdot)$ *είναι μια ομάδα και ότι* $H\leq G$ *είναι μια υποομάδα της.*

(1) *Να δειχθεί ότι το πλήθος των αριστερών συμπλόκων (πλευρικών κλάσεων) της* H *στην* G *ισούται με το πλήθος των δεξιών συμπλόκων (πλευρικών κλάσεων) της* H *στην* G.
(2) *Να δοθεί παράδειγμα ομάδας* $(G,\cdot)$ *και υποομάδας* H *της* G, *έτσι ώστε* $a\in G$ *και* $aH\neq Ha$.
(3) *Να δειχθεί ότι αν μια ομάδα* $(G,\cdot)$ *είναι αβελιανή, τότε για κάθε* $a\in G$ *ισχύει:* $aH=Ha$.

Άσκηση 6. *Έστω* $(G,\cdot)$ *μια ομάδα και* H,K *δύο υποομάδες της* G. *Αν* a,b *είναι δύο στοιχεία τής* G, *να δείξετε ότι:*

(1) $aH=bK\implies H=K$.
(2) *Δεν είναι πάντοτε αληθής η συνεπαγωγή*[2]*:* $aH=Kb\implies H=K$.

Άσκηση 7. *Βρείτε τον δείκτη* $[G:H]$ *της υποομάδας* $H\leq G$ *στις ακόλουθες περιπτώσεις:*

(1) $H=n\mathbb{Z}$ *και* $G=\mathbb{Z}$.
(2) $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x=y\}$ *και* $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Τέλος βρείτε μια υποομάδα H *της πολλαπλασιαστικής ομάδας* $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ *έτσι ώστε:* $[\mathbb{R}^*:H]=2$.

[2] Χρησιμοποιείστε, ως αντιπαράδειγμα, υποομάδες και στοιχεία τής συμμετρικής ομάδας $(\mathsf{S}_3,\circ)$.

Άσκηση 8. *Έστω ότι $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα και $H, K \leq G$ δύο υποομάδες τής G οι οποίες έχουν ως τάξη τον ίδιο πρώτο αριθμό p. Αν $H \neq K$, τότε δείξτε ότι $H \cap K = \{e\}$.*

Άσκηση 9. *Έστω G μια ομάδα τάξης pq, όπου p και q είναι πρώτοι αριθμοί και $p \neq q$. Να δειχθεί ότι κάθε γνήσια υποομάδα της G είναι κυκλική.*

Είναι αληθές ότι μια τέτοια ομάδα είναι κυκλική;

Άσκηση 10. *Αν $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα με τάξη $\mathsf{o}(G) < 300$, η οποία έχει δύο υποομάδες H, K με τάξεις αντιστοίχως $\mathsf{o}(H) = 24$ και $\mathsf{o}(K) = 54$, τότε ποια είναι η τάξη $\mathsf{o}(G)$ της G;*

Άσκηση 11. *Έστω ότι p, q είναι πρώτοι αριθμοί, και $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Να δειχθεί ότι:*

(α) *Αν η G είναι αβελιανή με τάξη pq και $p \neq q$, τότε η G είναι κυκλική.*

(β) *Υπάρχουν αβελιανές ομάδες τάξης p^2 οποίες δεν είναι κυκλικές.*

Άσκηση 12. *Έστω ότι $(G, \cdot)$ είναι μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα και m είναι το μέγιστο τού συνόλου $\mathcal{M} = \{\mathsf{o}(a) \in \mathbb{N} \mid a \in G\}$ των τάξεων των στοιχείων τής G:*

$$m = \max\big\{\mathsf{o}(a) \in \mathbb{N} \mid a \in G\big\}$$

Να δειχθεί ότι $\forall a \in G$: $a^m = e_G$.

Άσκηση 13. *Ο* **εκθέτης** *μιας ομάδας G, αν υπάρχει, ορίζεται να είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός m έτσι ώστε: $g^m = e, \forall g \in G$, και συμβολίζεται με $\exp(G)$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός, ορίζουμε $\exp(G) = \infty$.*

(1) *Δείξτε ότι ο εκθέτης υπάρχει για κάθε πεπερασμένη ομάδα G.*

(2) *Υπάρχουν άπειρες ομάδες με πεπερασμένο εκθέτη.*

(3) *Αν η $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ είναι πεπερασμένη αβελιανή ομάδα, δείξτε ότι:*

(α΄)

$$\exp(G) = \big[\mathsf{o}(g_1), \mathsf{o}(g_2), \cdots, \mathsf{o}(g_n)\big]$$

(β΄) *Δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο $g \in G$: $\mathsf{o}(g) = \exp(G)$.*

Άσκηση 14. *Έστω ότι $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα. Να δειχθεί ότι κάθε υποομάδα με δείκτη 2 στην G περιέχει όλα τα στοιχεία της G της μορφής x^2, $x \in G$:*

$$H \leq G \quad \text{και} \quad [G : H] = 2 \quad \Longrightarrow \quad \big\{x^2 \in G \mid x \in G\big\} \subseteq H$$

Ιδιαίτερα, αν $|G| = 2n$, $n \geq 1$, και $H \leq G$ είναι μια υποομάδα της G με τάξη n, τότε, $\forall x \in G$: $x^2 \in H$.

Άσκηση 15. *Έστω $(G_i, \cdot)$, $1 \leq i \leq 3$, τρείς κυκλικές ομάδες τάξης 2. Να βρεθούν όλες οι υποομάδες της ομάδας ευθύ γινόμενο $G = G_1 \times G_2 \times G_3$.*

Άσκηση 16. *Έστω H μια υποομάδα μιας ομάδας G. Να βρεθεί η τάξη της H στις ακόλουθες περιπτώσεις:*

(1) *$|G| = 68$, $|H| < 32$ και η H δεν είναι κυκλική.*

(2) *$|G| = 100$, η H δεν είναι κυκλική, και η H δεν διαθέτει στοιχείο τάξης 2.*

(3) *$|G| = 52$, $H \neq G$, και η H δεν είναι αβελιανή.*

Άσκηση 17. *Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα τάξης < 45 η οποία περιέχει μια υποομάδα H με τάξη > 10 και δείκτη > 3. Να βρεθούν οι τάξεις των G και H καθώς και ο δείκτης της H στην G.*

Άσκηση 18. **1.** *Έστω G μια κυκλική ομάδα τάξης n. Για κάθε διαιρέτη $m \mid n$, να προσδιορισθεί το πλήθος των στοιχείων της G με τάξη m.*
2. *Δείξτε ότι, με εξαίρεση δύο, όλες οι κυκλικές ομάδες έχουν άρτιο πλήθος γεννητόρων.*

Άσκηση 19. *Να αποδειχθεί, με χρήση Θεωρίας Ομάδων, το Θεώρημα του Gauss:*

$$\forall n \geq 1: \qquad \sum_{d \,|\, n} \varphi(d) = n$$

Άσκηση 20. *Έστω $\mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$ η ομάδα των αντιστρέψιμων 2×2 πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, και θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολά της:*

$$G = \big\{X_{a,b} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a,b \in \mathbb{R} \;\&\; a \neq 0\big\} \quad \& \quad H = \big\{X_{1,b} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R}\big\}, \quad \textit{όπου} \quad X_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) *Δείξτε ότι: $H \leq G \leq \mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$.*
(2) *Δείξτε ότι, $\forall A \in G$: $A \cdot H = H \cdot A$.*
(3) *Περιγράψτε το σύνολα πηλίκο G/H.*

Άσκηση 21. *Έστω $(G,\cdot)$ μια (όχι απαραίτητα πεπερασμένη) ομάδα και ότι H, K είναι υποομάδες της με $K \leq H$. Αν ο δείκτης $[G:K]$ είναι πεπερασμένος, τότε να δειχθεί ότι οι δείκτες $[G:H]$ και $[H:K]$ είναι πεπερασμένοι και ισχύει ότι:*

$$[G:K] = [G:H] \cdot [H:K]$$

Άσκηση 22. ***(Η Πρόταση Poincaré)*** *Αν H, K είναι δύο υποομάδες μιας ομάδας[3] G, των οποίων ο δείκτης στην G είναι πεπερασμένος, τότε και ο δείκτης τής $H \cap K$ στην G είναι επίσης πεπερασμένος. Επιπλέον:*

$$\big([G:H],[G:K]\big) = 1 \quad \Longrightarrow \quad [G:H\cap K] = \big[[G:H],[G:K]\big]$$

[3] Η G δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένη ομάδα.