ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκό Ετος 2023-2024

Ασκησεις - Φυλλαδιο 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Πέμπτη 18 Απριλίου 2024

Άσκηση 1. *Βρείτε όλα τα σύμπλοκα (πλευρικές κλάσεις) της υποομάδας $H \leq G$ της ομάδας G και περιγράψτε την ομάδα πηλίκο στις ακόλουθες περιπτώσεις:*

(1) $H = 4\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.
(2) $H = 4\mathbb{Z} \leq 2\mathbb{Z}$.
(3) $H = \langle [18]_{36} \rangle \leq \mathbb{Z}_{36}$.

Άσκηση 2. *Να δοθεί παράδειγμα ομάδας G η οποία περιέχει μια υποομάδα H έτσι ώστε ο «πολλαπλασιασμός» αριστερών πλευρικών κλάσεων $xH \cdot yH = (xy)H$ να μην είναι καλά ορισμένος και επομένως το ζεύγος $(G/\sim_{\mathcal{R}_H}, \cdot)$ δεν αποτελεί ομάδα.*

Άσκηση 3. *Θεωρούμε την ομάδα ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ και έστω $H = \langle([2]_4, [1]_6)\rangle$ η κυκλική υποομάδα της $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ η οποία παράγεται από το στοιχείο $([2]_4, [1]_6)$. Να δειχθεί ότι η ομάδα πηλίκο $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/H$ είναι κυκλική.*

Άσκηση 4. *Έστω H μια κανονική υποομάδα μιας ομάδας G.*
Αν $x, y \in G$, να δείξετε ότι:

$$xy \in H \iff yx \in H \qquad (*)$$

Ισχύει η παραπάνω ισοδυναμία αν η H **δεν** *είναι κανονική υποομάδα της G; Αν ισχύει να το αποδείξετε, και αν δεν ισχύει να δώσετε αντιπαράδειγμα.*

Άσκηση 5. *Έστω G μια ομάδα και H μια πεπερασμένη υποομάδα της G με την ιδιότητα ότι η H είναι η μοναδική υποομάδα της G με τάξη $\mathsf{o}(H)$. Να δείξετε ότι η H είναι κανονική.*

Άσκηση 6. *Έστω η διεδρική ομάδα (ομάδα συμμετριών του τετραγώνου) D_4 τάξης 8, βλέπε την Άσκηση* **4** *του Φυλλαδίου* **5**:

$$\mathsf{D}_4 = \{\mathsf{Id}_4, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \sigma\rho^3\}$$

και έστω η υποομάδα $H = \{\mathsf{Id}_4, \sigma\rho\}$ της D_4.

(1) *Βρείτε όλα τα αριστερά σύμπλοκα (αριστερές πλευρικές κλάσεις) της υποομάδας H στην D_4.*
(2) *Βρείτε όλα τα δεξιά σύμπλοκα (δεξιές πλευρικές κλάσεις) της υποομάδας H στην D_4.*
(3) *Είναι η H κανονική υποομάδα της D_4;*

Άσκηση 7. *Να βρεθεί ο δείκτης της υποομάδας H στην ομάδα G στις ακόλουθες περιπτώσεις:*

(1) $H = \langle [3]_{24} \rangle \ \leq \ \mathbb{Z}_{24}$.
(2) $H = \langle (2\ 3) \rangle \ \leq \ \mathsf{S}_3$.
(3) $H = \langle (1\ 3) \rangle \ \leq \ \mathsf{D}_4$.

Σε ποιές από τις παραπάνω περιπτώσεις η υποομάδα H είναι κανονική υποομάδα της G;

Άσκηση 8. *Έστω G μια ομάδα και $\mathcal{H} = \{H_i \mid i \in I\}$ μια οικογένεια κανονικών υποομάδων της G, όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών. Να δείξετε ότι η τομή $\bigcap_{i\in I} H_i$ της οικογένειας $\mathcal{H}$ είναι μια κανονική υποομάδα της G.*

Άσκηση 9. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και H μια κανονική υποομάδα της G. Αν*

$$\big([G : H], |H|\big) = 1$$

τότε να δείξετε ότι[1]*:*

$$\forall x \in G : \quad x^{\mathsf{o}(H)} = e \quad \Longrightarrow \quad x \in H$$

Άσκηση 10. *Αν G είναι μια ομάδα, να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η ομάδα G είναι αβελιανή.*
(2) *Η ομάδα πηλίκο $G/\mathsf{Z}(G)$ είναι κυκλική.*

Αν H είναι μια υποομάδα της G έτσι ώστε $H \leq \mathsf{Z}(G)$, τότε όπως γνωρίζουμε η H είναι κανονική υποομάδα της G. Αν η ομάδα πηλίκο G/H είναι κυκλική, είναι η G αβελιανή;

Άσκηση 11. *1. Θεωρούμε την κανονική υποομάδα $\mathbb{Z}$ της προσθετικής ομάδας $\mathbb{R}$. Να βρεθούν όλα τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης της ομάδας-πηλίκο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

2. Θεωρούμε την κανονική υποομάδα $\mathbb{Z}$ της προσθετικής ομάδας $\mathbb{Q}$. Να βρεθούν όλα τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης της ομάδας-πηλίκο $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Άσκηση 12. *Έστω ότι $\phi : G \longrightarrow G'$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.*

(1) *Να δειχθεί ότι, αν H είναι μια υποομάδα της G, τότε η εικόνα $\phi(H)$ είναι μια υποομάδα τής G'.*
(2) *Να δειχθεί ότι, αν K είναι μια υποομάδα της G', τότε η αντίστροφη εικόνα $\phi^{-1}(K) = \big\{g \in G \mid \phi(g) \in K\big\}$ είναι μια υποομάδα τής G.*

Άσκηση 13. *Σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις να εξεταστεί αν η απεικόνιση που ορίζεται είναι ομομορφισμός ομάδων και όταν είναι ομομορφισμός, να υπολογιστεί ο πυρήνας του.*

(1) $\phi :\ \mathbb{Z} \ \longrightarrow \ \mathbb{Z},\ \phi(z) = z - 1$.
(2) $\phi :\ \mathbb{R}^\star \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^\star,\ \phi(r) = |r|$ *και όπου η πράξη της $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι ο πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών.*
(3) $\phi :\ \mathbb{R} \ \longrightarrow \ \mathsf{GL}_2(\mathbb{R}),\ \phi(r) = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(4) $\phi :\ G \ \longrightarrow \ G,\ \phi(g) = g^{-1}$.
(5) $\phi :\ \mathbb{Z}_6 \ \longrightarrow \ \mathbb{Z}_2,\ \phi([z]_6) = [z]_2$.
(6) $\phi :\ \mathbb{Z}_7 \ \longrightarrow \ \mathbb{Z}_2,\ \phi([z]_7) = [z]_2$.

[1]Όπως ήδη γνωρίζουμε, χωρίς καμμία προϋπόθεση, ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή: για κάθε πεπερασμένη ομάδα H και για κάθε στοιχείο της $x \in H$: $x^{\mathsf{o}(x)} = e$.

Άσκηση 14. *Δώστε παράδειγμα μη-τετριμμένου*[2] *ομομορφισμού, η δικαιολογήστε γιατί δεν υπάρχει μη-τετριμμένος ομομορφισμός, $f\colon G \longrightarrow H$, όπου:*

(1) $f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$.
(2) $f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$.
(3) $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$.
(4) $f : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}$.
(5) $f : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathsf{S}_3$.
(6) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathsf{S}_3$.
(7) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}$.
(8) $f : 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
(9) $f : \mathsf{D}_4 \longrightarrow \mathsf{S}_3$.
(10) $f : \mathsf{S}_3 \longrightarrow \mathsf{S}_4$.
(11) $f : \mathsf{S}_4 \longrightarrow \mathsf{S}_3$.
(12) $f : \mathcal{V}_4 \longrightarrow \mathcal{V}_4$.

Άσκηση 15. *Έστω G μια ομάδα. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η G είναι αβελιανή.*
(2) *Η απεικόνιση $f : G \longrightarrow G, \quad f(x) = x^{-1}$ είναι ομομορφισμός.*
(3) *Η απεικόνιση $g : G \longrightarrow G, \quad f(x) = x^2$ είναι ομομορφισμός.*
(4) *Η απεικόνιση $h : G \times G \longrightarrow G, \quad h(x,y) = xy$ είναι ομομορφισμός.*

Άσκηση 16. (1) *Πόσοι ομομορφισμοί ομάδων $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ υπάρχουν;*
(2) *Πόσοι μονομορφισμοί ομάδων $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ υπάρχουν;*
(3) *Πόσοι επιμορφισμοί ομάδων $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ υπάρχουν;*
(4) *Πόσοι ομομορφισμοί ομάδων $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ υπάρχουν;*
(5) *Πόσοι ομομορφισμοί ομάδων $\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ υπάρχουν;*

Άσκηση 17. *Να δείξετε ότι:*

(1) *Υπάρχουν μονομορφισμοί ομάδων $f\colon G \longrightarrow G$ οι οποίοι δεν είναι ισομορφισμοί.*
(2) *Υπάρχουν επιμορφισμοί ομάδων $f\colon G \longrightarrow G$ οι οποίοι δεν είναι ισομορφισμοί.*

Άσκηση 18. *Έστω H και K δύο κανονικές υποομάδες μιας ομάδας G.*

(1) *Να δείξετε ότι $HK = KH$ και το υποσύνολο HK είναι μια κανονική υποομάδα της G.*
(2) *Να δείξετε ότι η υποομάδα $H \cap K$ είναι κανονική υποομάδα της H και της K.*
(3) *Αν $H \cap K = \{e\}$, τότε να δείξετε ότι: $hk = kh, \forall h \in H, \forall k \in K$, και υπάρχει ένας ισομορφισμός:*

$$HK \xrightarrow{\cong} H \times K$$

Άσκηση 19. *Έστω G μια άπειρη ομάδα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η G είναι κυκλική.*
(2) *Κάθε υποομάδα $H \neq \{e\}$ της G είναι ισόμορφη με την G.*

[2]Ένας ομομορφισμός ομάδων $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ καλείται τετριμμένος αν και μόνο αν, $\forall x \in G_1\colon f(x) = e_2$.