ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκό Ετος 2023-2024

Ασκησεις - Φυλλαδιο 7

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Παρασκευή 26 Απριλίου 2024

Άσκηση 1. *Έστω ότι G είναι μια κυκλική ομάδα. Να δειχθεί ότι μια απεικόνιση $f\colon G \longrightarrow G$ είναι ομομορφισμός ομάδων αν και μόνον αν υπάρχει ακέραιος $k \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε: $f(x) = x^k$, $\forall x \in G$.*

Είναι ο ακέραιος k μοναδικός;

Άσκηση 2. *Έστω $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ η ομάδα των αντιστρεψίμων $n \times n$ πινάκων πραγματικών αριθμών. Αν $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R}) = \big\{A \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\big\}$, να δείξετε ότι το σύνολο $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$ είναι μια κανονική υποομάδα της $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$, και ακολούθως να περιγράψετε την ομάδα πηλίκο:*

$$\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})/\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$$

Άσκηση 3. *Θεωρούμε την πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathsf{GL}(2,\mathbb{R})$ των αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.*

(1) *Να δείξετε ότι το υποσύνολο*
$$G = \big\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid ad \neq 0\big\}$$
είναι υποομάδα της $\mathsf{GL}(2,\mathbb{R})$.

(2) *Να δείξετε ότι το υποσύνολο*
$$H = \big\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R}\big\}$$
είναι κανονική (ορθόθετη) υποομάδα της G.

(3) *Να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό*
$$H \cong \mathbb{R}$$

(4) *Να δειχθεί ότι η ομάδα-πηλίκο G/H είναι αβελιανή.*

Άσκηση 4. *Θεωρούμε το σύνολο απεικονίσεων*
$$G = \big\{\tau_{a,b}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \tau_{a,b}(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \;\; a \neq 0\big\}$$
το οποίο είναι ομάδα με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων.

(1) *Να δείξετε ότι το υποσύνολο*
$$H = \big\{\tau_{1,b} \in G \mid b \in \mathbb{R}\big\}$$
είναι κανονική (ορθόθετη) υποομάδα της G.

(2) *Να προσδιορίσετε την ομάδα-πηλίκο G/H.*

Άσκηση 5. *Έστω η πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{C}^*$ των μη-μηδενικών μιγαδικών αριθμών.*

(1) *Αν* $\mathsf{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \leq \mathbb{C}^*$ *είναι η ομάδα του κύκλου, να δειχθεί ότι η ομάδα-πηλίκο* $\mathbb{C}^*/\mathsf{T}$ *είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα* $\mathbb{R}^+$ *των θετικών πραγματικών αριθμών.*

(2) *Να δείξετε ότι το σύνολο*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid (a,b) \neq (0,0) \right\}$$

εφοδιασμένο με την πράξη πολλαπλασιασμού πινάκων είναι ομάδα και υπάρχει ισομορφισμός:

$$G \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^*$$

Άσκηση 6 (**Θεώρημα Cauchy για αβελιανές ομάδες**). *Έστω* G *μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα τάξης* > 1 *και* p *ένας πρώτος διαιρέτης της τάξης* $\mathsf{o}(G)$ *της ομάδας. Τότε η* G *έχει (τουλάχιστον) ένα στοιχείο τάξης* p.

Άσκηση 7. *Βρείτε την τάξη της δοθείσας ομάδας πηλίκο:*

(1) $\mathbb{Z}_6/\langle [3]_6 \rangle$
(2) $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12})/(\langle [2]_4 \rangle \times \langle [2]_{12} \rangle)$
(3) $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)/\langle ([2]_4, [1]_2) \rangle$
(4) $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)/(\{[0]_3\} \times \mathbb{Z}_5)$
(5) $(\mathbb{Z}_2 \times S_3)/\langle ([1]_2, (123)) \rangle$

Άσκηση 8. *Βρείτε την τάξη του στοιχείου:*

(1) $[5]_{12} + \langle [4]_{12} \rangle$ *στην ομάδα πηλίκο* $\mathbb{Z}_{12}/\langle [4]_{12} \rangle$
(2) $[26]_{60} + \langle [12]_{60} \rangle$ *στην ομάδα πηλίκο* $\mathbb{Z}_{60}/\langle [12]_{60} \rangle$
(3) $([2]_3, [1]_6) + \langle ([1]_3, [1]_6) \rangle$ *στην ομάδα πηλίκο* $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6)/\langle ([1]_3, [1]_6) \rangle$
(4) $([2]_6, [0]_8) + \langle ([4]_6, [4]_8) \rangle$ *στην ομάδα πηλίκο* $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8)/\langle ([4]_6, [4]_8) \rangle$

Άσκηση 9. *Να δειχθεί ότι υπάρχουν ισομορφισμοί ομάδων:*

(1) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/\langle ([0]_2, [1]_4) \rangle \cong \mathbb{Z}_2$
(2) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/\langle ([0]_2, [2]_4) \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
(3) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/\langle ([1]_2, [2]_4) \rangle \cong \mathbb{Z}_4$
(4) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8)/\langle (0, 4, [0]_8) \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$
(5) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle (2,2) \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$

Άσκηση 10. *Αν* G *και* H *είναι πεπερασμένες κυκλικές ομάδες, να δείξετε ότι η ομάδα ευθύ γινόμενο* $G \times H$ *είναι κυκλική αν και μόνον αν:*

$$(\mathsf{o}(G), \mathsf{o}(H)) = 1 \tag{†}$$

Επιπλέον να δείξετε ότι:

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm} \iff (n,m) = 1 \tag{††}$$

Άσκηση 11. *Να εξετασθεί αν η ομάδα ευθύ γινόμενο* $G_1 \times G_2$ *δύο κυκλικών ομάδων* G_1 *και* G_2 *είναι επίσης κυκλική.*

Άσκηση 12. *Έστω* $G = \langle a \rangle$ *μια κυκλική ομάδα. Να βρεθούν όλοι οι ομομορφισμοί ομάδων* $f : G \longrightarrow G$.

Άσκηση 13. *Να βρεθούν όλοι οι ομομορφισμοί ομάδων* $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m$.

Άσκηση 14. (1) *Δείξτε ότι το σύνολο* $\mathsf{Aut}(G)$ *όλων των αυτομορφισμών μιας ομάδας* G *είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.*

(2) *Να προσδιορισθεί η ομάδα αυτομορφισμών* $\mathsf{Aut}(G)$*, όταν:*
  (α΄) G *είναι μια άπειρη κυκλική ομάδα.*
  (β΄) G *είναι μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα.*

Άσκηση 15. *Έστω* X *και* Y *δύο μη-κενά σύνολα με το ίδιο πλήθος στοιχείων:* $|X| = |Y|$. *Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός ομάδων*

$$\widetilde{\varphi} : \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}(Y)$$

Άσκηση 16. *Να βρεθεί η αριστερή κανονική αναπαράσταση της κυκλικής ομάδας τάξης* 3.

Άσκηση 17. *Να βρεθεί η αριστερή κανονική αναπαράσταση της ομάδας* $\mathcal{V} = \{e, a, b, c\}$ *του Klein.*

Άσκηση 18. *Έστω* $f : G \longrightarrow G'$ *ένας ομομορφισμός ομάδων.*

(1) *Αν* H *είναι μια κανονική υποομάδα της* G*, να δείξετε ότι η* $f(H)$ *είναι μια κανονική υποομάδα της* $\mathrm{Im}(f) = f(G)$.

(2) *Αν* K *είναι μια κανονική υποομάδα της* G'*, να δείξετε ότι η* $f^{-1}(K)$ *είναι κανονική υποομάδα της* G.

Άσκηση 19. *(Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμών) Έστω* G *μια ομάδα,* $H \leq G$ *μια υποομάδα της* G*, και* $N \trianglelefteq G$ *μια κανονική υποομάδα της* G. *Να δείξετε ότι:*

(1) *Το υποσύνολο* $HN = \{hn \in G \mid h \in H \ \ \& \ \ n \in N\}$ *είναι μια υποομάδα της* G *και* $N \trianglelefteq HN$.

(2) $H \cap N \trianglelefteq H$*, και υπάρχει ένας ισομορφισμός ομάδων:*

$$HN \big/ N \ \cong \ H \big/ (H \cap N)$$

Αν η ομάδα G *είναι προσθετική, τότε ο παραπάνω ισομορφισμός έχει την ακόλουθη μορφή:*

$$H + N \big/ N \ \cong \ H \big/ (H \cap N)$$

Ως εφαρμογή να δείξετε ότι, αν $G = \mathbb{Z}$, $H = 3\mathbb{Z}$, $N = 4\mathbb{Z}$*, τότε υπάρχει ισομορφισμός:*

$$3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \ \cong \ \mathbb{Z}_4$$

Πρόβλημα. *Ως γενίκευση της Εφαρμογής της Άσκησης 19, να εξετάσετε αν υπάρχει ισομορφισμός*

$$[n, m]\mathbb{Z} \big/ m\mathbb{Z} \ \ \cong \ \ n\mathbb{Z} \big/ (n, m)\mathbb{Z}$$

όπου $n, m \in \mathbb{Z}^+$. $\surd$

Άσκηση 20. (1) *Έστω* G *μια ομάδα και* $g \in G$. *Να δείξετε ότι η απεικόνιση*

$$\mathsf{i}_g : G \longrightarrow G, \qquad x \longmapsto \mathsf{i}_g(x) = gxg^{-1}$$

είναι αυτομορφισμός, ο οποίος καλείται **ο εσωτερικός αυτομορφισμός της** G **μέσω του** g.

(2) *Υπολογίστε τις υποομάδες* $i_{(123)}(H)$ *και* $\mathsf{i}_{(23)}(K)$ *για τις υποομάδες* $H = \langle(12)\rangle$ *και* $K = \langle(132)\rangle$ *της ομάδας* S_3.

Άσκηση 21. *Έστω G μια πολλαπλασιαστική ομάδα και $\emptyset \neq S \subseteq G$ ένα μη-κενό υποσύνολο της G.*

(1) *Το υποσύνολο*

$$\langle S \rangle = \bigcap \big\{ H \leq G \mid S \subseteq H \big\}$$

είναι η μικρότερη υποομάδα της G η οποία περιέχει το S.

Η υποομάδα $\langle S \rangle$ καλείται **η υποομάδα της G η οποία παράγεται από το** S.

(2) *Να δείξετε ότι:*

$$\langle S \rangle = \big\{ s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \in G \ \mid \ n \geq 0, \ \ a_i \in \mathbb{Z}, \ \ s_i \in S \big\}$$

Αν η ομάδα G είναι προσθετική, τότε η παραπάνω ισότητα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\langle S \rangle = \big\{ a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n \in G \ \mid \ n \geq 0, \ \ a_i \in \mathbb{Z}, \ \ s_i \in S \big\}$$

Άσκηση 22. (1) *Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων της προσθετικής αβελιανής ομάδας $\mathbb{Q}$. Να δείξετε ότι η υποομάδα $\langle S \rangle$ η οποία παράγεται από το S είναι άπειρη κυκλική.*

(2) *Έστω T ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων της προσθετικής αβελιανής ομάδας $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Να δείξετε ότι η υποομάδα $\langle T \rangle$ η οποία παράγεται από το T είναι πεπερασμένη κυκλική.*

Άσκηση 23. *Να δοθούν παραδείγματα:*

(1) *Άπειρης ομάδας G, όλα τα στοιχεία της οποίας έχουν πεπερασμένη τάξη.*

(2) *Ομάδας G η οποία δεν έχει στοιχεία πεπερασμένης τάξης > 1 αλλά περιέχει μια κανονική υποομάδα H έτσι ώστε όλα τα στοιχεία της ομάδας-πηλίκο G/H έχουν πεπερασμένη τάξη.*

(3) *Άπειρης ομάδας G η οποία περιέχει μια κανονική υποομάδα H όλα τα στοιχεία της οποίας έχουν πεπερασμένη τάξη, και η ομάδα πηλίκο G/H δεν έχει στοιχεία πεπερασμένης τάξης.*