# ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

## Ακαδημαϊκό Έτος 2023-2024

### Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 1

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

**Δευτέρα 4 Μαρτίου 2024**

**Άσκηση 1.** *Να εξεταστεί αν η σχέση $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ που ορίζεται επί του $X$ σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις είναι ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική*[1]*, μεταβατική.*

(1) $X = \mathbb{R}$, *και* $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\quad a \sim_{\mathcal{R}} b \iff a^2 = b^2$.
(2) $X = \mathbb{R}$, *και* $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\quad a \sim_{\mathcal{R}} b \iff a - b \leq 2$.
(3) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, *και* $\forall a, b \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $\quad (a, b) \sim_{\mathcal{R}} (c, d) \iff a + d = b + c$.
(4) $X = \mathbb{Z}$, *και* $\forall a, b \in \mathbb{Z}$: $\quad a \sim_{\mathcal{R}} b \iff b = a + 3c$, *για κάποιον ακέραιο αριθμό* $c$.

**Άσκηση 2.** *Να εξεταστεί ποια από τα επόμενα σύνολα ορίζουν σχέση ισοδυναμίας και στην περίπτωση που η απάντηση είναι καταφατική να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας καθώς και τα επαγόμενα σύνολα πηλίκα:*

(1) $f_1 = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid nm > 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
(2) $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \| \, x \geq y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(3) $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(4) $f_4 = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2/n - m\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

**Άσκηση 3.** *Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ ορίζουμε δύο σχέσεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ ως εξής:*

$$z \sim_{\mathcal{R}} w \iff z - w \in \mathbb{R}$$
$$z \sim_{\mathcal{S}} w \iff z - w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

*Να εξετάσετε αν οι σχέσεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας επί του $\mathbb{C}$, και, στην περίπτωση κατά την οποία είναι σχέσεις ισοδυναμίας:*

(1) *να περιγράψετε τα σύνολα πηλίκα $\mathbb{C}/\mathcal{R}$ και $\mathbb{C}/\mathcal{S}$.*
(2) *να εξετασθεί αν οι πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών είναι συμβιβαστές με τις σχέσεις ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$.*

**Άσκηση 4.** *Έστω $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ και έστω η σχέση*

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (5, 8), (7, 4), \} \subseteq X \times X$$

*Να βρεθεί η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας $\langle \mathcal{R} \rangle$ επί του $X$ η οποία περιέχει τη σχέση $\mathcal{R}$.*

---

[1]Υπενθυμίζουμε ότι μια σχέση $\mathcal{R}$ επί ενός συνόλου $X$ καλείται *αντισυμμετρική*, αν:

$$\forall x, y \in X : \quad x \sim_{\mathcal{R}} y \quad \text{και} \quad y \sim_{\mathcal{R}} x \implies x = y$$

**Άσκηση 5.** *Έστω ότι* $\mathbb{K}$ *συμβολίζει ένα από τα ακόλουθα σώματα* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, *και έστω* $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *το σύνολο των* $n \times n$ *πινάκων με στοιχεία από το* $\mathbb{K}$. *Υπενθυμίζουμε ότι δύο πίνακες* $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *καλούνται* **όμοιοι** *αν υπάρχει αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* $P$ *έτσι ώστε:*

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = B$$

*Δείξτε ότι ορίζοντας:*

$$A \sim_{\mathcal{R}} B \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ο πίνακας } A \text{ είναι όμοιος με τον } B$$

*αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας* $\mathcal{R}$ *(η οποία καλείται* **σχέση ομοιότητας** *τετραγωνικών πινάκων) στο σύνολο* $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. *Είναι η σχέση ομοιότητας συμβιβαστή με τις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πινάκων;*

**Άσκηση 6.** *Έστω* $X$ *ένα μη-κενό σύνολο και* $\mathcal{R}$ *μια σχέση επί του* $X$, *δηλαδή ένα υποσύνολο του* $X \times X$. *Να δείξετε ότι η σχέση*

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \bigcap \big\{ \mathcal{S} \subseteq X \times X \ \big| \ \mathcal{S} \text{ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του } X \text{ και } \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \big\}$$

*είναι η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας επί του* $X$ *η οποία περιέχει τη σχέση* $\mathcal{R}$. *Επιπλέον να δείξετε ότι:*

$$\forall a, b \in X : \ a \sim_{\langle \mathcal{R} \rangle} b \iff \exists n \geq 0 \text{ και } x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in X : \quad a = x_1 \quad \& \quad b = x_{n+1}, \quad \text{και} :$$

$$\begin{cases} (x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{R}, \quad 1 \leq i \leq n \\ \qquad\qquad \text{ή} \\ (x_{i+1}, x_i) \in \mathcal{R}, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

*Η σχέση* $\langle \mathcal{R} \rangle$ *καλείται* **η σχέση ισοδυναμίας επί του** $X$ **η οποία παράγεται από τη σχέση** $\mathcal{R}$.

**Άσκηση 7.** *Για κάθε θετικό ακέραιο* $n$, *θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \quad x \sim_{\mathcal{R}_n} y \iff n \mid x - y$$

*επί του συνόλου* $\mathbb{Z}$ *των ακεραίων. Αν* $n, m$ *είναι θετικοί ακέραιοι, να περιγραφεί η σχέση ισοδυναμίας*

$$\langle \mathcal{R}_n \cup \mathcal{R}_m \rangle$$

*η οποία παράγεται από τη σχέση* $\mathcal{R}_n \cup \mathcal{R}_m$, *με την έννοια της Άσκησης 6.*

**Άσκηση 8.** *Πόσες σχέσεις ισοδυναμίας ορίζονται επί ενός συνόλου* $X$ *με* $5$ *στοιχεία;*

**Άσκηση 9.** *Έστω το σύνολο* $A = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$. *Να εξεταστεί, αν η αντιστοιχία*

$$+ : \ A \times A \longrightarrow A, \qquad (a, b) \longmapsto a + b \ \ \text{(η πρόσθεση των ακεραίων)}$$

*ορίζει (διμελή) πράξη επί του* $A$.

**Άσκηση 10.** *Έστω το σύνολο* $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. *Να εξεταστεί, αν η αντιστοιχία*

$$\star \ : \ \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q}^*, \qquad (a, b) \longmapsto a \star b = \frac{a}{b}$$

*ορίζει (διμελή) πράξη επί του* $\mathbb{Q}^*$, *και να εξεταστεί, αν πρόκειται για προσεταιριστική ή μεταθετική πράξη.*

**Άσκηση 11.** *Έστω $X$ ένα συνόλο και $\mathcal{P}(X)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του. Υπενθυμίζουμε ότι, αν $A, B$ είναι δύο υποσύνολα του $X$, δηλαδή $A, B \in \mathcal{P}(X)$, τότε η* **συμμετρική διαφορά** *τους $A\Delta B$ ορίζεται να είναι το ακόλουθο υποσύνολο*

$$A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$$

*του $X$. Να εξετάσετε αν το σύνολο $\mathcal{P}(X)$ εφοδιασμένο με την πράξη της συμμετρικής διαφοράς*

$$\Delta : \; \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \;\longrightarrow\; \mathcal{P}(X), \qquad (A, B) \;\longmapsto\; A \,\Delta\, B$$

*ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(1) *Προσεταιριστικότητα.*
(2) *Μεταθετικότητα.*
(3) *Υπάρχει στοιχείο $E \in \mathcal{P}(X)$ έτσι ώστε: $E\Delta A = A = A\Delta E$, για κάθε στοιχείο $A \in \mathcal{P}(X)$; Αν υπάρχει τέτοιο στοιχείο $E$ είναι μοναδικό;*
(4) *Αν υπάρχει μοναδικό στοιχείο $E \in \mathcal{P}(X)$ όπως στο (3), να εξεταστεί αν, για κάθε στοιχείο $A \in \mathcal{P}(X)$, υπάρχει ένα στοιχείο $A' \in \mathcal{P}(X)$ έτσι ώστε: $A\Delta A' = E = A'\Delta A$; Αν υπάρχει τέτοιο στοιχείο $A'$, είναι μοναδικό;*
(5) *Ορίζουμε στο $\mathcal{P}(X)$ μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ ως εξής:*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X) : \quad A \sim_{\mathcal{R}} B \quad\iff\quad |A| = |B|$$

*δηλαδή τα υποσύνολα $A, B$ έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Είναι η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ συμβιβαστή με την πράξη $\Delta$;*
(6) *Αν $A, B \in \mathcal{P}(X)$, να εξετασθεί αν η εξίσωση*

$$A \,\Delta\, T = B$$

*ως προς $T$, έχει μοναδική λύση στο $\mathcal{P}(X)$.*

**Άσκηση 12.** *Έστω $\mathcal{A} = \big\{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f$ τυχούσα απεικόνιση$\big\}$. Να δείξετε ότι ορίζοντας $\forall f, g \in \mathcal{A}$:*

$$(f \star g)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b)$$

*(δηλαδή αθροίζουμε όλα τα δυνατά γινόμενα $f(a)g(b)$, όπου οι φυσικοί αριθμοί $a, b$ ικανοποιούν τη σχέση: $ab = n$)*[2]*, αποκτούμε μια διμελή πράξη $\star : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \;\longrightarrow\; \mathcal{A}$.*

(1) *Να δείξετε ότι η πράξη «$\star$» είναι προσεταιριστική.*
(2) *Να δείξετε ότι η πράξη «$\star$» είναι μεταθετική.*
(3) *Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική απεικόνιση $\varepsilon \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε:*

$$\varepsilon \star f = f = f \star \varepsilon$$

**Άσκηση 13.** *Έστω $S$ ένα σύνολο με πλήθος στοιχείων ίσο με $|S| = n$.*

(1) *Πόσες (διμελείς) πράξεις μπορούν να ορισθούν επί του $S$;*
(2) *Αν $n = 2$, τότε:*
   (α΄) *πόσες προσεταιριστικές πράξεις μπορούν να ορισθούν επί του $S$;*
   (β΄) *πόσες μεταθετικές πράξεις μπορούν να ορισθούν επί του $S$;*
   (γ΄) *πόσες προσεταιριστικές και μεταθετικές πράξεις μπορούν να ορισθούν επί του $S$;*
(3) *Αν $n = 3$, πόσες προσεταιριστικές και μεταθετικές πράξεις μπορούν να ορισθούν επί του $S$;*

---

[2] Ισοδύναμα:

$$(f \star g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d)g\big(\frac{n}{d}\big) = \sum_{d \mid n} f\big(\frac{n}{d}\big)g(d)$$

**Άσκηση 14.** *Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$. Να συμπληρωθεί ο ακόλουθος πίνακας κατά τέτοιον τρόπο ώστε να αποτελεί τον πίνακα μιας μεταθετικής πράξης «$\star$» επί τού $A$.*

| $\star$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\epsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | | | | | |
| $\beta$ | | | | | |
| $\gamma$ | | | | | |
| $\delta$ | | | | | |
| $\epsilon$ | | | | | |

Υπό προϋποθέσεις μπορούν να ορισθούν διάφορες πράξεις σε σχέσεις επί συνόλων. Θεωρούμε μη-κενά σύνολα $X, Y, Z$, και $W$. Έστω $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$, $\mathcal{T} \subseteq Y \times Z$, και $\mathcal{S} \subseteq Z \times W$, σχέσεις από το $X$ και $Y$, από το $Y$ στο $Z$, και από το $Z$ στο $W$ αντίστοιχα. Η **σύνθεση** $\mathcal{R} \circ \mathcal{T}$ των σχέσεων $\mathcal{R}$ και $\mathcal{T}$ ορίζεται ως η ακόλουθη σχέση από το $X$ στο $Z$:

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{T} = \big\{(x,z) \in X \times Z \mid \text{υπάρχει } y \in Y : \ (x,y) \in \mathcal{R} \ \text{ και } \ (y,z) \in \mathcal{T}\big\}$$

Επίσης η **αντίστροφη** της σχέσης $\mathcal{R}$ από το $X$ στο $Y$ ορίζεται ως η ακόλουθη σχέση από το $Y$ στο $X$:

$$\mathcal{R}^{-1} = \big\{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in \mathcal{R}\big\}$$

Συμβολίζουμε με $I_X$ την ακόλουθη «διαγώνια» ή ταυτοτική σχέση επί ενός συνόλου $X$:

$$I_X = \big\{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\big\}$$

**Άσκηση 15.** *Διατηρώντας τους παραπάνω συμβολισμούς, να δείξετε τα ακόλουθα.*

(1) *Αν οι σχέσεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{T}$ είναι απεικονίσεις, τότε η σχέση $\mathcal{T} \circ \mathcal{R}$ είναι απεικόνιση και μάλιστα είναι η σύνθεση των απεικονίσεων $\mathcal{R}$ και $\mathcal{T}$.*
(2) *Δείξτε ότι: $(\mathcal{T} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1}$.*
(3) *Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα σύνθεσης σχέσεων: $\mathcal{S} \circ (\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{S} \circ \mathcal{T}) \circ \mathcal{R}$.*
(4) $\mathcal{R} \circ I_X = \mathcal{R} = I_Y \circ \mathcal{R}$.
(5) *Αν $X = Y$, και οι σχέσεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{T}$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας, να εξετασθεί αν οι σχέσεις $\mathcal{R} \circ \mathcal{T}$ και $\mathcal{R}^{-1}$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας.*

Στην ακόλουθη άσκηση ζητείται να χαρακτηρισθούν οι σχέσεις ισοδυναμίας με βάση πράξεις επί αυτών.

**Άσκηση 16.** *Έστω $\mathcal{R}$ μια σχέση επί του μη-κενού συνόλου $X$.*

(1) *Η σχέση $\mathcal{R}$ είναι ανακλαστική αν και μόνον αν $I_X \subseteq \mathcal{R}$.*
(2) *Η σχέση $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική αν και μόνον αν $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.*
(3) *Η σχέση $\mathcal{R}$ είναι μεταβατική αν και μόνον αν $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.*
(4) *Η σχέση $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας αν και μόνον αν $I_X \subseteq \mathcal{R}$ και $\mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$.*

**Άσκηση 17.** *Στο σύνολο $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, ορίζουμε διμελή πράξη:*

$$\star : \ X \times X \longrightarrow X, \quad (x_1, y_1) \star (x_2, y_2) = (x_1 x_2 + 2y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

*Να δειχθεί ότι η πράξη «$\star$» είναι προσεταιριστική και μεταθετική, και υπάρχει στοιχείο $e \in X$ έτσι ώστε $e \star a = a = a \star e$, $\forall a \in X$. Για ποιά στοιχεία $a \in X$ υπάρχει στοιχείο $b \in X$ έτσι ώστε: $a \star b = e = b \star a$;*

**Άσκηση 18.** *Στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$, ορίζουμε διμελή πράξη «$\star$» ως εξής:*

$$\star : \ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad x \star y = x + y - xy$$

*Να δειχθεί ότι η πράξη «$\star$» είναι προσεταιριστική και μεταθετική, και υπάρχει στοιχείο $e \in X$ έτσι ώστε $e \star a = a = a \star e$, $\forall a \in X$. Για ποιά στοιχεία $a \in X$ υπάρχει στοιχείο $b \in X$ έτσι ώστε: $a \star b = e = b \star a$;*

**Άσκηση 19.** *Έστω $X$ ένα μη-κενό σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολό του, το οποίο θεωρούμε ότι είναι εφοδιασμένο με την πράξη «$\Delta$» της συμμετρικής διαφοράς, όπως στην Άσκηση 11. Να σχηματισθεί ο πίνακας της πράξης «$\Delta$» όταν το σύνολο $X$ έχει: $1$, $2$, και $3$ στοιχεία.*

**Άσκηση 20.** *Έστω $\Delta = \big\{A_i \,|\, i \in I\big\}$ μια διαμέριση του μη-κενού συνόλου $X$. Έστω $Y$ ένα σύνολο και έστω ότι $f_i \colon A_i \longrightarrow Y$ είναι απεικονίσεις, για κάθε $i \in I$. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδική απεικόνιση $f \colon X \longrightarrow Y$ έτσι ώστε: $f|_{A_i} = f_i, \forall i \in I$.*

Αν $n$ είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε συμβολίζουμε με $\mathcal{R}_n$ την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \quad a \sim_{\mathcal{R}_n} b \quad \Longleftrightarrow \quad n \mid a - b$$

επί του συνόλου $\mathbb{Z}$.

**Άσκηση 21.** *Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω τα σύνολα πηλίκα $\mathbb{Z}_n$ και $\mathbb{Z}_m$ του $\mathbb{Z}$ ως προς τις σχέσεις ισοδυναμίας $\mathcal{R}_n$ και $\mathcal{R}_m$ αντίστοιχα.*

(1) *Πότε ισχύει ότι $\mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{R}_m$ (ως υποσύνολα του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$);*
(2) *Πότε ορίζοντας αντιστοιχία $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m$, $f([x]_n) = [x]_m$, αποκτούμε μια καλά ορισμένη απεικόνιση;*
(3) *Γενικότερα αν $k \in \mathbb{Z}$, να εξετασθεί πότε ορίζοντας $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m$, $f([x]_n) = [kx]_m$, αποκτούμε μια καλά ορισμένη απεικόνιση.*

**Άσκηση 22.** *Να εξετασθεί πότε η σχέση $\mathcal{R}_n \cup \mathcal{R}_m$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $\mathbb{Z}$.*