ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκό Ετος 2023-2024

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 2

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Πέμπτη 21 Μαρτίου 2024

Άσκηση 1. *Να εξετάσετε αν το σύνολο*

$$G = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid 0 \neq b \ \text{ είναι περιττός} \right\}$$

εφοδιασμένο με την συνήθη πράξη πρόσθεσης, αντίστοιχα πολλαπλασιασμού, ρητών αριθμών αποτελεί αβελιανή ομάδα.

Άσκηση 2. *Αν p είναι ένας πρώτος αριθμός, να εξετάσετε αν το σύνολο*

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\}$$

εφοδιασμένο με την συνήθη πράξη πρόσθεσης, αντίστοιχα πολλαπλασιασμού, ρητών αριθμών αποτελεί αβελιανή ομάδα.

Άσκηση 3. *Να δείξετε ότι αν σε μια ομάδα $(G, \star)$ ισχύει $x = x^{-1}$, $\forall x \in G$, τότε η G είναι αβελιανή (ως συνήθως x^{-1} συμβολίζει το αντίστροφο στοιχείο του x).*

Άσκηση 4. *Έστω ότι $(G, \star)$ μια ομάδα και έστω $a \in G$. Να δειχθεί ότι οι απεικονίσεις*

$$f_a : G \longrightarrow G, \quad f_a(x) = a \star x$$
$$g_a : G \longrightarrow G, \quad g_a(x) = x \star a$$

είναι «1-1» και «επί».

Άσκηση 5. *Έστω $(G, \star)$ ένα μονοειδές. Να δειχθεί ότι αν οι απεικονίσεις*

$$f_a : G \longrightarrow G, \quad f_a(x) = a \star x$$
$$g_a : G \longrightarrow G, \quad g_a(x) = x \star a$$

είναι «1-1» και «επί», τότε το μονοειδές $(G, \star)$ είναι ομάδα.

Άσκηση 6. *Έστω $(G, \star)$ ένα μονοειδές με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Να δειχθεί ότι αν μια εκ των απεικονίσεων*

$$f_a : G \longrightarrow G, \quad f_a(x) = a \star x$$
$$g_a : G \longrightarrow G, \quad g_a(x) = x \star a$$

είναι «1-1», τότε το μονοειδές $(G, \star)$ είναι ομάδα.

Άσκηση 7. *Να βρεθεί μια διμελής πράξη «$\star$» στο ανοιχτο διάστημα $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1\}$ με την οποία το σύνολο $(0,1)$ να αποτελεί ομάδα έτσι ώστε το αντίστροφο του x να είναι το $1-x$.*

Άσκηση 8. *Έστω X ένα μη-κενό σύνολο και έστω $\mathcal{P}(X)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X (δυναμοσύνολο του X). Να δείξετε ότι το $\mathcal{P}(X)$ αποτελεί ομάδα με πράξη την συμμετρική διαφορά υποσυνόλων του X:*

$$A \Delta B := (A - B) \cup (B - A), \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X)$$

όπου $A - B := \{x \in A \,|\, x \notin B\}$. Πότε η ομάδα $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ είναι πεπερασμένη; Πόσα στοιχεία έχει; Είναι η ομάδα $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ αβελιανή;

Σχηματίστε τον πίνακα της ομάδας $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ όταν το σύνολο X έχει ένα, δύο ή τρία στοιχεία.

Άσκηση 9. *Έστω U το σύνολο των σημείων στο μιγαδικό επίπεδο τα οποία απέχουν απόσταση ίση με 1 από την αρχή των αξόνων. Με άλλα λόγια:*

$$\mathsf{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Να δείξετε ότι το ζεύγος $(\mathsf{U}, \cdot)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα, όπου «$\cdot$» είναι η συνήθης πράξη πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών.

Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ομάδα $(\mathsf{U}, \cdot)$ περιέχει ομάδες $(\mathsf{U}_n, \cdot)$, όπου $|\mathsf{U}_n| = n$.

Άσκηση 10. *Έστω ότι G είναι ένα σύνολο και*

$$\circ : \; G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto a \circ b$$

είναι μια διμελής πράξη επί του G. Υποθέτουμε ότι:

(1) *Υπάρχει ένα στοιχείο $\varepsilon \in G$ τέτοιο ώστε: $a \circ b = \varepsilon$ αν και μόνον αν $a = b$.*
(2) *$(a \circ c) \circ (b \circ c) = a \circ b, \; \forall a, b, c \in G$.*

Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(G, \star)$ αποτελεί ομάδα, όπου «$\star$» συμβολίζει την πράξη:

$$a \star b := a \circ (\varepsilon \circ b), \quad \forall a, b \in G$$

Άσκηση 11. *Να εξετάσετε ποιά από τα ακόλουθα ζεύγη αποτελούν ομάδες:*

(1) *$(\mathbb{R}, \star)$, όπου $x \star y = x + y + k$, όπου k σταθερός πραγματικός αριθμός.*
(2) *$(\mathbb{R}, \star)$, όπου $x \star y = \frac{xy}{2}$.*
(3) *$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \star)$, όπου $(a, b) \star (c, d) = (ad + bc, bd)$.*
(4) *$(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$, όπου $(a, b) \star (c, d) = (ac, bc + d)$.*
(5) *$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \star)$, όπου $(a, b) \star (c, d) = (ac, bc + d)$.*
(6) *$((\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\}, \star)$, όπου $(a, b) \star (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.*
(7) *$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \star)$, όπου $(a, b) \star (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.*

Έστω ότι το ζεύγος $(G, \star)$ είναι ομάδα με ουδέτερο στοιχείο e, και αντίστροφο του στοιχείου x το στοιχείο x'. Υπενθυμίζουμε ότι αν $x \in G$ και $n \in \mathbb{Z}$, τότε η n-**οστή δύναμη** του στοιχείου x ορίζεται να είναι το στοιχείο:

$$x^n = \begin{cases} x \star x \star \cdots \star x \; (n\text{-παράγοντες}), & \text{αν } n \geq 1 \\ e, & \text{αν } n = 0 \\ x' \star x' \star \cdots \star x' \; (-n\text{-παράγοντες}), & \text{αν } n \leq -1 \end{cases}$$

Άσκηση 12. *Έστω ότι a, b, c, x είναι στοιχεία μιας ομάδας $(G, \star)$. Θα γράφουμε ως συνήθως χάριν απλότητας $x^n = x \star x \star \cdots \star x$ (n-παράγοντες), και $xy = x \star y$, και $x' = x^{-1}$. Σε κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις, να βρεθεί το στοιχείο x συναρτήσει των στοιχείων a, b, c:*

(1) $x^2 = b$ & $x^5 = e$.
(2) $x^2 b = xa^{-1}c$.
(3) $x^2 a = bxc^{-1}$ & $acx = xac$.
(4) $ax^2 = b$ & $x^3 = e$.
(5) $x^2 = a^2$ & $x^5 = e$.
(6) $(xax)^3 = bx$ & $x^2 a = (xa)^{-1}$.

Άσκηση 13. *Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα. Αν $n \geq 1$ είναι ένας φυσικός αριθμός, θα γράφουμε ως συνήθως $x^n = x \star x \star \cdots \star x$ (n-παράγοντες), και $xy = x \star y$, και $x' = x^{-1}$.*

Θα λέμε ότι το στοιχείο $a \in G$ έχει n-οστή ρίζα στην G, αν υπάρχει στοιχείο $z \in G$ έτσι ώστε: $z^n = a$.

Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(1) $\forall a, b \in G$: $(bab^{-1})^n = ba^n b^{-1}$.
(2) *Αν $a, b \in G$ και ισχύει $ab = ba$, τότε: $(ab)^n = a^n b^n$.*
(3) *Αν $a, x \in G$ και ισχύει $xax = e$, τότε: $(xa)^{2n} = a^n$.*
(4) *Αν $a \in G$ και ισχύει $a^3 = e$, τότε το a έχει τετραγωνική ρίζα.*
(5) *Αν $a \in G$ και ισχύει $a^2 = e$, τότε το a έχει κυβική ρίζα.*
(6) *Αν το a^{-1} έχει κυβική ρίζα, τότε και το a έχει κυβική ρίζα.*
(7) *Αν $x^2 ax = a^{-1}$, τότε το a έχει κυβική ρίζα.*
(8) *Αν $xax = b$, τότε το ab έχει τετραγωνική ρίζα.*

Άσκηση 14. *Έστω $n \geq 1$ και θεωρούμε την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας "$\sim_n$" στο $\mathbb{Z}$:*

$$a \sim_n b \iff n \mid a - b$$

Να δείξετε ότι η σχέση $\sim_n$ είναι συμβιβαστή με την πράξη του πολλαπλασιασμού ακεραίων αριθμών, και άρα ορίζεται μια πράξη πολλαπλασιασμού στο αντίστοιχο σύνολο πηλίκο

$$\cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad [a]_n \cdot [b]_n = [ab]_n$$

Να εξετάσετε αν το ζεύγος $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ αποτελεί ομάδα.

Ειδικότερα να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα πολλαπλασιασμού, για την περίπτωση $n = 6$:

$\cdot$	$[\mathbf{0}]_\mathbf{6}$	$[\mathbf{1}]_\mathbf{6}$	$[\mathbf{2}]_\mathbf{6}$	$[\mathbf{3}]_\mathbf{6}$	$[\mathbf{4}]_\mathbf{6}$	$[\mathbf{5}]_\mathbf{6}$
$[\mathbf{0}]_\mathbf{6}$						
$[\mathbf{1}]_\mathbf{6}$						
$[\mathbf{2}]_\mathbf{6}$						
$[\mathbf{3}]_\mathbf{6}$						
$[\mathbf{4}]_\mathbf{6}$						
$[\mathbf{5}]_\mathbf{6}$						

Τέλος να προσδιορισθεί ο πίνακας Cayley της ομάδας $(\mathsf{U}(\mathbb{Z}_{12}), \cdot)$ των αντιστρέψιμων κλάσεων υπολοίπων mod 12.

Άσκηση 15. *Για $n \geq 1$ θεωρούμε την πολλαπλασιαστική ομάδα*

$$\mathsf{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

Να προσδιορισθούν οι πίνακες Cayley της ομάδας U_n, όταν $1 \leq n \leq 7$.

Άσκηση 16. *Έστω ότι $(G, \star)$ είναι μια ομάδα και $g_1, \cdots, g_n \in G$. Να δειχθεί ότι:*

$$(g_1 \star g_2 \star \cdots \star g_n)' = g_n' \star \cdots \star g_2' \star g_1'$$

Άσκηση 17. *Γνωρίζουμε ότι αν $(G,\star)$ είναι μια ομάδα, τότε ισχύουν οι Νόμοι Διαγραφής:*

$$a \star x = b \star x \quad \Longrightarrow \quad a = b \qquad\qquad \textit{και} \qquad\qquad x \star a = x \star b \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

για κάθε $a, b, x \in G$.

Αντίστροφα: να δειχθεί ότι αν «$\star$» είναι μια προσεταιριστική πράξη επί ενός μη-κενού πεπερασμένου συνόλου G και ισχύουν οι παραπάνω Νόμοι Διαγραφής για την πράξη «$\star$», τότε υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $e \in G$ για την πράξη «$\star$» και το ζεύγος $(G,\star)$ είναι μια ομάδα.

Άσκηση 18. *Έστω ότι $(G,\star)$ είναι μια ομάδα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $i \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε, $\forall a, b \in G$:*

$$(a \star b)^i = a^i \star b^i, \qquad\qquad (a \star b)^{i+1} = a^{i+1} \star b^{i+1}, \qquad\qquad (a \star b)^{i+2} = a^{i+2} \star b^{i+2}$$

Να δειχθεί ότι η ομάδα $(G,\star)$ είναι αβελιανή.

Άσκηση 19. *Έστω p, q και r τρεις διακεκριμμένοι πρώτοι αριθμοί. Θεωρούμε το σύνολο*

$$G = \left\{p^n q^m r^k \in \mathbb{Q} \mid n, m, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(G,\cdot)$, όπου «$\cdot$» είναι η συνήθης πράξη πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών, είναι μια αβελιανή ομάδα. Πως μπορεί να γενικευθεί το αποτέλεσμα της παρούσης άσκησης;

Άσκηση 20. *Να δειχθεί ότι η σχέση ισομορφίας «$\cong$» στην κλάση όλων των μονοειδών ή στην κλάση όλων των ομάδων*

$$(M_1,\star_1) \;\cong\; (M_2,\star_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{υπάρχει ισομορφισμός } \; f\colon (M_1,\star_1) \;\longrightarrow\; (M_2,\star_2)$$

είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Άσκηση 21. *Να προσδιορισθεί η ομάδα Grothendieck των μεταθετικών μονοειδών $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, και $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*,\star)$, βλέπε την Άσκηση 18 του Φυλλαδίου 2. Οι πράξεις «$+$» και «$\cdot$» είναι οι συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, και*

$$\forall (n,m),(k,l) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*: \quad (n,m)\star(k,l) = (nk, ml)$$

Άσκηση 22. *Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\star)$, όπου*

$$(x_1,x_2)\star(y_1,y_2) = (x_1y_1 + 2x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

είναι ένα μεταθετικό μονοειδές, και ακολούθως να προσδιορισθεί η ομάδα $\mathsf{U}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\star)$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του μονοειδούς $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\star)$[1]*.*

Άσκηση 23. *Έστω $f\colon (M,\star) \longrightarrow (N,*)$ ένας ομομορφισμός μονοειδών, βλέπε το Φυλλάδιο Ασκήσεων 2. Να δειχθεί ότι ορίζοντας*

$$f^\dagger\colon \mathsf{U}(M,\star) \;\longrightarrow\; \mathsf{U}(N,*), \qquad f^\dagger(m) = f(m)$$

αποκτούμε έναν καλά ορισμένο ομομορφισμό ομάδων.

Άσκηση 24. *Πόσα διαφορετικά μονοειδή μπορούν να ορισθούν επί ενός συνόλου με 1, 2, 3 ή 4 στοιχεία; Πόσα από αυτά τα μονοειδή είναι ομάδες;*

---

[1] Βλέπε Άσκηση 8 του Φυλλαδίου 2.

Άσκηση 25. *Έστω G ένα σύνολο με πλήθος στοιχείων ίσο με $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Να ορισθεί κατάλληλη πράξη «$\star$» επί του G έτσι ώστε το ζεύγος $(G, \star)$ να είναι ομάδα. Να δειχθεί ότι σε κάθε περίπτωση η ομάδα $(G, \star)$ είναι απαραίτητα αβελιανή.*

Άσκηση 26. *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα κλειστό ή ανοιχτό διάστημα της πραγματικής ευθείας. Να προσδιορισθεί κατάλληλη πράξη «$\star$» επί του I έτσι ώστε το ζεύγος $(I, \star)$ να αποτελεί ομάδα.*