ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκο Ετος 2023-2024

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 3

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Πέμπτη 28 Μαρτίου 2024

Άσκηση 1. *Θεωρούμε την προσθετική ομάδα* $(\mathbb{Z}_6, +)$.

(1) *Υπολογίστε τις υποομάδες* $\langle [0]_6 \rangle$, $\langle [1]_6 \rangle$, $\langle [2]_6 \rangle$, $\langle [3]_6 \rangle$, $\langle [4]_6 \rangle$, *και* $\langle [5]_6 \rangle$ *της ομάδας* $\mathbb{Z}_6$.
(2) *Ποια στοιχεία είναι γεννήτορες της ομάδας* $\mathbb{Z}_6$;
(3) *Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της* $\mathbb{Z}_6$.

Άσκηση 2. *Έστω* H *και* K *δυο υποομάδες μιας ομάδας* $(G, \cdot)$. *Θεωρούμε το υποσύνολο*

$$H \cdot K = \{h \cdot k \in G \mid h \in H \ \text{ και } \ k \in K\}$$

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $H \cdot K$ *είναι υποομάδα της* G *αν κα μόνον αν* $H \cdot K = K \cdot H$.

Άσκηση 3. *Έστω* $(G, \cdot)$ *μια ομάδα και* $n \in \mathbb{Z}^+$ *ένας σταθερός θετικός ακέραιος. Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο της* G:

$$G_n := \{g^n \mid g \in G\}$$

Να εξετάσετε κάτω υπό ποιές προϋποθέσεις το υποσύνολο G_n *είναι υποομάδα της* G.

Άσκηση 4. *Έστω* $(G, \cdot)$ *μια ομάδα και* S *ένα μη-κενό υποσύνολο της* G.

(1) *Να δείξετε ότι το υποσύνολο*

$$\mathsf{Z}_S(G) := \{x \in G \mid x \cdot s = s \cdot x, \ \forall s \in S\}$$

είναι μια υποομάδα της G.
(2) *Με τον συμβολισμό του* (1), *δείξτε ότι η υποομάδα* $\mathsf{Z}_G(G)$, *η οποία προκύπτει για* $S = G$, *είναι αβελιανή. (Η υποομάδα* $\mathsf{Z}_G(G)$ *καλείται* **κέντρο** *της* G *και συμβολίζεται με* $\mathsf{Z}(G)$*).*
(3) *Να προσδιορισθεί το κέντρο* $\mathsf{Z}(\mathsf{S}_3)$ *της συμμετρικής ομάδας* $(\mathsf{S}_3, \circ)$.

Άσκηση 5. *Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών* $a, b \in \mathbb{R}$, *ορίζουμε την απεικόνιση:*

$$\tau_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tau_{a,b}(x) := ax + b$$

Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο πραγματικών συναρτήσεων

$$G := \{\tau_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R} \ \& \ a \neq 0\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων «∘», το σύνολο* G *είναι ομαδα.*
(2) *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα υποσύνολα της* G:

$$H := \{\tau_{a,b} \in G \mid a \in \mathbb{Q}\} \quad \text{και} \quad N := \{\tau_{1,b} \in G \mid b \in \mathbb{R}\}$$

είναι υποομάδες της G.

(3) *Να δειχθεί ότι για κάθε $f \in G$ και για κάθε $g \in N$ ισχύει: $f \circ g \circ f^{-1} \in N$.*

Υπενθυμίζουμε ότι αν $(G_1, \star_1)$, $(G_2, \star_2)$, $\cdots$, $(G_n, \star_n)$, είναι ομάδες, το **ευθύ γινόμενο** τους ορίζεται να είναι η ομάδα $(G, \star)$, όπου $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, και:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \star (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 \star_1 b_1, a_2 \star_2 b_2, \cdots, a_n \star_n b_n)$$

Άσκηση 6. *Έστω ότι $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ είναι δύο ομάδες και $(G_1 \times G_2, \star)$ το ευθύ γινόμενό τους. Υποθέτουμε ότι H_1 είναι μια υποομάδα της G_1 και H_2 είναι μια υποομάδα της G_2,*

(1) *Να δειχθεί ότι το καρτεσιανό γινόμενο $H_1 \times H_2$ είναι υποομάδα της ομάδας $G_1 \times G_2$.*
(2) *Αν για κάθε $h_i \in H_i$ και για κάθε $g_i \in G_i$, όπου $i = 1, 2$, ισχύει ότι $g_i h_i g_i^{-1} \in H_i$, όπου $i = 1, 2$, να εξετασθεί αν για κάθε $g \in G_1 \times G_2$ και για κάθε $h \in H_1 \times H_2$, ισχύει ότι: $ghg^{-1} \in H_1 \times H_2$.*
(3) *Να γενικευθούν τα μέρη (1) και (2) για πλήθος (υπο)ομάδων $n > 2$.*

Άσκηση 7. *Έστω ότι $(G_1, \star_1)$ και $(G_2, \star_2)$ είναι δύο ομάδες. Να προσδιορισθεί το κέντρο*

$$\mathsf{Z}(G_1 \times G_2)$$

της ομάδας ευθύ γινόμενο $G_1 \times G_2$. Να γενικευθεί το αποτέλεσμα για το ευθύ γινόμενο $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, n το πλήθος ομάδων G_1, G_2, $\cdots$, G_n.

Άσκηση 8. (1) *Να προσδιορισθεί το κέντρο της συμμετρικής ομάδας S_4 (των συμμετριών του ισοπλεύρου τριγώνου).*
(2) *Να προσδιορισθεί το κέντρο της διεδρικής ομάδας D_4 των συμμετριών του τετραγώνου.*
(3) *Να προσδιορισθεί το κέντρο της ομάδας Q των τετρανίων του Hamilton.*

Άσκηση 9. *Έστω η ομάδα των ακεραίων $(\mathbb{Z}, +)$ και $\mathcal{P}$ το σύνολο των πρώτων αριθμών. Για κάθε $p \in \mathcal{P}$, θεωρούμε την κυκλική υποομάδα $\langle p \rangle$ της $\mathbb{Z}$ η οποία παράγεται από το p. Να δειχθεί ότι*

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \langle p \rangle = \{0\}$$

Άσκηση 10. *Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα και $S \subseteq G$ ένα τυχόν μη-κενό υποσύνολο της G. Να δειχθεί ότι το υποσύνολο*

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subseteq H \leq G} H$$

δηλαδή η τομή όλων των υποομάδων της G οι οποίες περιέχουν το S, είναι μια υποομάδα[1] της G. Επιπλέον να δειχθεί ότι:

(1) *Η $\langle S \rangle$ είναι η μικρότερη υποομάδα της G η οποία περιέχει το σύνολο S.*
(2) *Η υποομάδα $\langle S \rangle$ έχει την ακόλουθη περιγραφή:*

$$\langle S \rangle = \left\{ g_1^{\epsilon_1} \cdot g_2^{\epsilon_2} \cdots g_k^{\epsilon_k} \in G \mid k \in \mathbb{N}_0 \;\;\&\;\; g_i \in S \;\;\&\;\; \epsilon_i \in \{1, -1\}, \;\; 1 \leq i \leq k \right\}$$

(3) *Αν $S = \{a\}$, τότε $\langle S \rangle = \langle a \rangle$ είναι η κυκλική υποομάδα της G η οποία παράγεται από το a.*
(4) *Η ομάδα G καλείται* **πεπερασμένα παραγόμενη** *αν υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολό της S έτσι ώστε $G = \langle S \rangle$. Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι πεπερασμένα παραγόμενη.*
(5) *Βρείτε ένα σύνολο γεννητόρων για την ομάδα $\mathcal{V}_4$ του Klein και την συμμετρική ομάδα S_3.*

Άσκηση 11. *Να δειχθεί ότι η προσθετική ομάδα $(\mathbb{Q}, +)$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη.*

[1] Η υποομάδα $\langle S \rangle$ καλείται η **υποομάδα της G η οποία παράγεται από το σύνολο** S. Τα στοιχεία του συνόλου S καλούνται **γεννήτορες** της υποομάδας $\langle S \rangle$.

Άσκηση 12. *Αν p είναι ένας πρώτος αριθμός, θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο των (μη-μηδενικών) μιγαδικών αριθμών:*

$$\mathbb{Z}(p^\infty) := \big\{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \ z^{p^n} = 1\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι με πράξη τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών, το σύνολο $\mathbb{Z}(p^\infty)$ είναι ομάδα*[2].
(2) *Να δειχθεί ότι για κάθε $n = 0, 1, 2, \cdots$, τα ακόλουθα υποσύνολα της ομάδας $\mathbb{Z}(p^\infty)$*

$$T_n := \{z \in \mathbb{Z}(p^\infty) \mid z^{p^n} = 1\}$$

είναι κυκλικές υποομάδες της $\mathbb{Z}(p^\infty)$ και ισχύει:

$$T_0 \ \subseteq \ T_1 \ \subseteq \ \cdots \ \subseteq \ T_n \ \subseteq \ T_{n+1} \ \subseteq \ \cdots \ \subseteq \ \mathbb{Z}(p^\infty)$$

(3) *Να δειχθεί ότι:*

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_{n \geq 0} T_n$$

(4) *Να εξετασθεί αν η ομάδα $\mathbb{Z}(p^\infty)$ είναι κυκλική.*

Άσκηση 13. *Να δειχθεί ότι η ομάδα*

$$\mathsf{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{U}_n = \big\{z \in \mathbb{C} \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : \ z^n = 1\big\}$$

δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη, και κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της είναι πεπερασμένη κυκλική ομάδα.

Άσκηση 14. (1) *Επαληθεύστε ότι οι ακόλουθοι έξι πίνακες*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

αποτελούν μια ομάδα G με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων.
(2) *Ποιό είναι το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της G;*
(3) *Ποια ομάδα από αυτές που γνωρίζουμε είναι δομικά ίδια (ισόμορφη) με την ομάδα G των έξι πινάκων;*

Άσκηση 15. *Θεωρούμε τη συμμετρική ομάδα S_3.*

(1) *Βρείτε τις κυκλικές υποομάδες $\langle\rho_1\rangle$, $\langle\rho_2\rangle$, και $\langle\mu_1\rangle$ της S_3.*
(2) *Να βρεθούν όλες οι υποομάδες, γνήσιες και μη γνήσιες, της S_3 και να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της S_3.*

Άσκηση 16. *Συμπληρώστε τον πίνακα του πολλαπλασιασμού για την κυκλική υποομάδα $\langle\rho\rangle$ της S_5 η οποία παράγεται από τη μετάθεση*

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Να προσδιορισθεί το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της $\langle\rho\rangle$. Είναι η ομάδα $\langle\rho\rangle$ δομικά ίδια (ισόμορφη) με την S_3;

[2] Η ομάδα $\mathbb{Z}(p^\infty)$ καλείται η p-**οστή ομάδα Prüfer**.

Άσκηση 17. *Να δειχθεί ότι η κυκλική υποομάδα της* $\mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$ *η οποία παράγεται από τον πίνακα*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ισόμορφη με την κυκλική ομαδα $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Άσκηση 18. *Να δειχθεί ότι αν* $n \geq 3$, *τότε το μόνο στοιχείο* σ *της συμμετρικής ομάδας* S_n *που ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\sigma \circ \gamma = \gamma \circ \sigma, \quad \forall \gamma \in \mathsf{S}_n$$

είναι η ταυτοτική μετάθεση ι. *Ισοδύναμα να δειχθεί ότι* $\mathsf{Z}(\mathsf{S}_n) = \{\iota\}$.

Άσκηση 19. *Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο πινάκων:*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & [a]_3 & [b]_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

το οποίο εφοδιάζουμε με την ακόλουθη πράξη:

$$\begin{pmatrix} 1 & [a]_3 & [b]_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & [c]_3 & [d]_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & [a+c]_3 & [b+d]_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(G, \cdot)$ *είναι μια αβελιανή ομάδα με τάξη* 9. *Είναι η* G *κυκλική;*

Άσκηση 20. *Θεωρούμε το σύνολο* $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$. *Για κάθε* $a, b \in G$ *θέτουμε:*

$$a \star b = ab - 2a - 2b + 6$$

Να δειχθεί ότι το ζεύγος $(G, \star)$ *είναι μια αβελιανή ομάδα. Να βρεθούν τα αντίστροφα στοιχεία στην ομάδα* G *των στοιχείων* $\frac{3}{2}$, -1, 5. *Να προσδιορισθεί η κυκλική υποομάδα* $\langle 4 \rangle$ *της* G *η οποία παράγεται από το* 4. *Τέλος να βρθούν, αν υπάρχουν, όλα τα στοιχεία της* G *με τάξη ίση με* 2.