ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκο Ετος 2023-2024

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 4

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Πέμπτη 4 Απριλίου 2024

Άσκηση 1. *Να βρεθεί η τάξη τού στοιχείου a τής ομάδας $(G, \star)$, όπου:*

(1) $a = [5]_{14}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{14}, +)$,
(2) $a = -i + 2013, \quad (G, \star) = (\mathbb{C}^\star, \cdot)$,
(3) $a = -1 + 2i\sqrt{3}, \quad (G, \star) = (\mathbb{C}^\star, \cdot)$,
(4) $a = (-1 - i\sqrt{3})/2, \quad (G, \star) = (\mathbb{C}^\star, \cdot)$,
(5) $\cos(4\pi/9) + i\sin(4\pi/9), \quad (G, \star) = (\mathbb{C}^\star, \cdot)$.
(6) $a = [18]_{60}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{60}, +)$,
(7) $a = [31]_{50}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{50}), +)$,
(8) $a = [22]_{38}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{38}), +)$,
(9) $a = [99]_{2013}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{2013}), +)$,
(10) $a = [154]_{2013}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{2013}), +)$,
(11) $a = [1962]_{2013}, \quad (G, \star) = (\mathbb{Z}_{2013}), +)$.

Άσκηση 2. *Βρείτε όλες τις υποομάδες της προσθετικής ομάδας $\mathbb{Z}_{28}$ και για κάθε μια από αυτές βρείτε όλους τους γεννήτορες της.*

Άσκηση 3. *Έστω ότι $(G, \cdot)$ είναι μια κυκλική ομάδα με $|G| = 30$ και με γεννήτορα το στοιχείο $a \in G$. Να προσδιοριστούν όλοι οι γεννήτορες τής G.*

Άσκηση 4. *Να βρεθούν όλες οι κυκλικές ομάδες οι οποίες διαθέτουν ακριβώς 2 γεννήτορες.*

Άσκηση 5. *Να σχηματιστεί το διάγραμμα Hasse των υποομάδων τής $(\mathbb{Z}_{18}, +)$.*

Άσκηση 6. *Να σχηματιστεί το διάγραμμα Hasse των υποομάδων τής $(\mathbb{Z}_{48}, +)$.*

Άσκηση 7. *Να σχηματιστεί το διάγραμμα Hasse των υποομάδων τής ομάδας $(\mathsf{U}_{16}, \cdot)$ των 16-οστών ριζών της μονάδας, και ακολούθως να βρεθούν όλοι οι γεννήτορες της.*

Άσκηση 8. *Να ευρεθούν όλα τα στοιχεία a τής $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ με τάξη $\mathsf{o}(a) = 5$.*

Άσκηση 9. *Έστω ότι $(G, \cdot)$ είναι μια κυκλική ομάδα με $|G| = 20$ και με γεννήτορα το στοιχείο $a \in G$. Να προσδιοριστούν όλα τα στοιχεία b τής G με τάξη $\mathsf{o}(b) = 10$.*

Άσκηση 10. *Έστω* $(\mathsf{U}(\mathbb{Z}_n),\cdot)$ *η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων τού συνόλου* $\mathbb{Z}_n$. *Ποιες από τις επόμενες ομάδες είναι κυκλικές;*

$$(1)\ \mathsf{U}(\mathbb{Z}_{10}), \quad (2)\ \mathsf{U}(\mathbb{Z}_{12}), \quad (3)\ \mathsf{U}(\mathbb{Z}_{20}), \quad (4)\ \mathsf{U}(\mathbb{Z}_{24}), \quad (5)\ \mathsf{U}(\mathbb{Z}_{31})$$

Άσκηση 11. *Έστω* $G = \langle a \rangle$ *μια κυκλική ομάδα και* H *και* K *δύο υποομάδες της* G.

(1) *Να βρεθεί ένας γεννήτορας της ομάδας* $H \cap K$.
(2) *Από την Άσκηση 3 του Φυλλαδίου 3, το υποσύνολο* $HK = \{hk \in G \mid h \in H,\ k \in K\}$ *είναι υποομάδα της* G. *Να βρεθεί ένας γεννήτορας της* HK.

Άσκηση 12. *Να εξετασθεί αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:*

«Αν μια ομάδα G *είναι τέτοια ώστε κάθε γνήσια υποομάδα της είναι κυκλική, τότε η* G *είναι κυκλική»*

Άσκηση 13. *Έστω G μια ομάδα και* $a \in G$ *ένα στοιχείο της. Ας υποθέσουμε ότι το* $a \in G$ *παράγει μια κυκλική υποομάδα τάξης* 2 *και είναι το μοναδικό τέτοιο στοιχείο στην* G. *Δείξτε ότι* $ax = xa$ *για κάθε* $x \in G$.

Άσκηση 14. *Δείξτε ότι σε κάθε πεπερασμένη κυκλική ομάδα G τάξης n, η εξίσωση* $x^m = e$ *έχει ακριβώς m λύσεις x στην* G *για κάθε θετικό ακέραιο* m *που διαιρεί τον n.*

Άσκηση 15. *Σε σχέση με την άσκηση* **14**, *τι συμβαίνει αν* $1 < m < n$ *και ο m δεν διαιρεί τον n;*

Άσκηση 16. *Αν* G *είναι μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα και*

$$|\{x \in G \mid x^n = e\}| \leq n, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

αποδείξτε ότι η G *είναι κυκλική.*

Άσκηση 17. *Έστω* G *μια ομάδα και* $a, b \in G$. *Αν*

$$a^5 = e \quad \text{και} \quad aba^{-1} = b^2$$

τι μπορείτε να πείτε για την τάξη $\mathsf{o}(b)$ *του* b*;*

Άσκηση 18. *Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι τέσσερα γνωστά αποτελέσματα της Θεωρίας Αριθμών. Στην παρούσα άσκηση ζητείται η απόδειξή τους με χρήση Θεωρίας Ομάδων.*

(1) *Αν* $n \geq 1$, *και* φ *είναι η συνάρτηση του Euler, να δείξετε ότι*[1]*:*

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

(2) *Έστω* $a > 1$ *ένας ακέραιος, να δείξετε ότι:*

$$n \mid \varphi(a^n - 1)$$

(3) $p \geq 2$ *είναι ένας πρώτος αριθμός τότε και μόνον τότε αν*[2]*:* $p \mid (p-1)! + 1$. *Με άλλα λόγια:*

$$p \text{ πρώτος} \iff (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

[1] Η παρακάτω ισότητα αυτή είναι γνωστή στην Θεωρία Αριθμών, ως Θεώρημα του Gauss.
[2] Η ισοδυναμία αυτή είναι γνωστή στην Θεωρία Αριθμών, ως Θεώρημα του Wilson.

(4) *Αν $a, n \geq 1$ είναι θετικοί ακέραιοι, και $(a, n) = 1$, δείξτε ότι $n \mid a^{\phi(n)} - 1$, δηλαδή*[3]*:*

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Άσκηση 19. *Έστω ότι G είναι μια αβελιανή ομάδα και έστω ότι H και K είναι πεπερασμένες κυκλικές υποομάδες της G με $|H| = r$ και $|K| = s$. Δείξτε ότι αν οι r και s είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε η G περιέχει μια κυκλική υποομάδα τάξης rs.*

Άσκηση 20. *Έστω G μια ομάδα και υποθέτουμε ότι η τομή όλων των μη-τετριμμένων υποομάδων της G είναι μια μη-τετριμμένη υποομάδα της G. Να δειχθεί ότι κάθε στοιχείο της G έχει πεπερασμένη τάξη.*

Άσκηση 21. *Να εξετάσετε αν οι ακόλουθες ομάδες είναι κυκλικές:*

$$(1)\ \mathbb{C}^*, \qquad (2)\ \mathsf{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \qquad (3)\ \mathsf{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} :\ z^n = 1\},$$

$$(4)\ G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathsf{GL}(2, \mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

[3] Ο ισχυρισμός αυτός είναι γνωστός στην Θεωρία Αριθμών, ως Θεώρημα του Euler.