ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκο Ετος 2023-2024

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 5

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Πέμπτη 11 Απριλίου 2024

Άσκηση 1. *Χρησιμοποιώντας πίνακες Cayley ομάδων και το Θεώρημα του Lagrange, δείξτε ότι:*

(1) *Κάθε ομάδα τάξης* ≤ 5 *είναι αβελιανή.*

(2) *Υπάρχουν δύο ομάδες τάξης 4 με διαφορετικό πίνακα Cayley και δύο ομάδες τάξης 6 με διαφορετικό πίνακα Cayley.*

Δηλαδή υπάρχουν ακριβώς δύο διεφορετικές (μη-ισόμορφες) ομάδες τάξης 4*, και ακριβώς δύο διαφορετικές (μη-ισόμορφες) ομάδες τάξης* 6.

(3) *Ταξινομείστε, περιγράφοντας τον αντίστοιχο πίνακα Cayley, όλες τις ομάδες τάξης* ≤ 7.

Άσκηση 2. *Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο της* n*-οστής συμμετρικής ομάδας* S_n*:*

$$H = \{\sigma \in \mathsf{S}_n \mid \sigma(n) = n\}$$

Να δείξετε ότι η H *είναι υποομάδα της* S_n *και ακολούθως να υπολογίσετε τον δείκτη* $[\mathsf{S}_n : H]$.

Άσκηση 3. *Να βρεθούν όλες οι πεπερασμένες υποομάδες της πολλαπλασιαστικής ομάδας* $\mathbb{C}^*$ *των μη-μηδενικών μιγαδικών αριθμών.*

Άσκηση 4. *Για κάθε* $n \geq 1$*, θεωρούμε την ομάδα* U_n *των* n*-οστών ριζών της μονάδας, θεωρούμενης ως υποομάδας της πολλαπλασιαστικής ομάδας* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ *των μη-μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Για* $n, m \geq 1$*, αφού υπολογίσετε τις υποομάδες* $\mathsf{U}_n \cap \mathsf{U}_m$ *και* $\mathsf{U}_n \cdot \mathsf{U}_m$ *της* $\mathbb{C}^*$*, να υπολογιστούν οι δείκτες*

$$[\mathsf{U}_n : \mathsf{U}_n \cap \mathsf{U}_m] \quad \& \quad [\mathsf{U}_n \cdot \mathsf{U}_m : \mathsf{U}_m]$$

Άσκηση 5. *Θεωρούμε το στοιχείο* $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *της συμμετρικής ομάδας* S_4*. Να βρεθούν όλα οι αριστερές πλευρικές κλάσεις της υποομάδας* $H = \langle \tau \rangle$ *στην* S_4 *και να υπολογιστεί ο δείκτης* $[\mathsf{S}_4 : H]$.

Άσκηση 6. *Θεωρούμε την ομάδα* Q_8 *των τετρανίων του Hamilton, δηλαδή την υποομάδα της* $\mathsf{GL}(2, \mathbb{C})$ *η οποία αποτελείται από τους ακόλουθους πίνακες:*

$$Q_8 = \Big\{ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ -I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ -I = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ -J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ -K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \Big\}$$

Θεωρούμε τις υποομάδες $H = \langle J \rangle$ *και* $K = \langle K \rangle$ *της* Q_8*. Να υπολογίσετε τα αριστερά σύμπλοκα (αριστερές πλευρικές κλάσεις) των* H *και* K *στην* Q_8*, καθώς και τον δείκτη* $[Q_8 : H \cap K]$.

Άσκηση 7. *Έστω ότι $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα και ότι $H \leq G$ και $K \leq G$ είναι δύο υποομάδες της. Θεωρούμε το υποσύνολο $\mathcal{R} \subseteq G \times G$ που ορίζεται ως εξής:*

$$(a, b) \in \mathcal{R} \iff a = h \cdot b \cdot k, \quad \text{για κάποια } h \in H, \ k \in K$$

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathcal{R}$ ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας επί της G και ακολούθως να περιγραφούν οι κλάσεις ισοδυναμίας.

Άσκηση 8. *Περιγράψετε την ομάδα συμμετριών του κανονικού πενταγώνου D_5 (πέμπτη διεδρική ομάδα), και ακολούθως να σχηματίσετε το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της.*

Άσκηση 9. *Έστω H μια υποομάδα μιας ομάδας G. Δείξτε ότι:*

$$\forall a \in G: \ aH = Ha \iff \forall a, b \in G: \ a^{-1}b^{-1} \in H$$

Άσκηση 10. *Έστω G μια ομάδα πεπερασμένης τάξης, και H και K δύο υποομάδες της G. Αν $m = [G : H]$ και $n = [G : K]$, να δείξετε ότι:*

$$[m, n] \ \leq \ [G : H \cap K] \ \leq \ mn$$

Επιπλέον, αν οι αριθμοί n, m είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε:

$$[G : H \cap K] = [G : H] \cdot [G : K]$$

Άσκηση 11. *Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο πινάκων με στοιχεία από το σύνολο $\mathbb{Z}_3$:*

$$G = \{X_{a,b} \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3) \mid [a]_3, [b]_3 \in \mathbb{Z}_3\} \quad \text{όπου} \quad X_{a,b} = \begin{pmatrix} [1]_3 & [a]_3 & [b]_3 \\ [0]_3 & [1]_3 & [0]_3 \\ [0]_3 & [0]_3 & [1]_3 \end{pmatrix}$$

(1) *Δείξτε ότι το παραπάνω σύνολο G εφοδιασμένο με την πράξη συνήθους πολλαπλασιασμού πινάκων και κλάσεων υπολοίπων* mod 3 *αποτελεί μια αβελιανή ομάδα τάξης 9.*
(2) *Δείξτε ότι το υποσύνολο*

$$H = \big\{X_{a,0} \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3) \mid [a]_3 \in \mathbb{Z}_3\big\}$$

της G είναι μια υποομάδα της G.
(3) *Βρείτε τον δείκτη $[G : H]$, και περιγράψτε το σύνολο πηλίκο $G/H := G/\mathcal{R}_H$.*

Άσκηση 12. *Υπολογίστε τον δείκτη $[G : H]$ της υποοομάδας H στην G στις ακόλουθες περιπτώσεις:*

(1) $H = \langle [8]_{24} \rangle$ *και* $G = \mathbb{Z}_{24}$.
(2) $H = \mathsf{T} = \{z \in \mathbb{Z} \mid |z| = 1\}$ *και* $G = \mathbb{C}^*$.
(3) $H = \mathsf{SL}(2, \mathbb{R})$ *και* $G = \mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$.
(4) $H = \mathbb{Z}$ *και* $G = \mathbb{Q}$.
(5) $H = \mathbb{R}$ *και* $G = \mathbb{C}$.

Άσκηση 13. *Έστω H και K δύο υποομάδες της ομάδας G και g ένα στοιχείο της G. Να δείξετε ότι το σύνολο $gH \cap gK$ είναι ένα αριστερό σύμπλοκο (αριστερή πλευρική κλάση) της υποομάδας $H \cap K$ στην G. Γενικότερα αν a, b είναι δύο στοιχεία της G και $aH \cap bK \neq \emptyset$, τότε να δειχθεί ότι το σύνολο $aH \cap bK$ είναι ένα αριστερό σύμπλοκο (αριστερή πλευρική κλάση) της υποομάδας $H \cap K$ στην G.*

Άσκηση 14. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και H μια υποομάδα της G. Θέτουμε:*

$$\forall a \in G: \quad m_a = \mathsf{min}\{m \in \mathbb{N} \mid a^m \in H\}$$

Δείξτε ότι $\forall a \in G$: $m_a \mid \mathsf{o}(a)$.

Άσκηση 15. *Έστω G μια κυκλική ομάδα.*

(1) *Αν η G είναι άπειρη, να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει υποομάδα $H_n \leq G$ της G έτσι ώστε:*

$$[G : H_n] = n$$

(2) *Αν η G είναι πεπερασμένη, να δειχθεί ότι για κάθε διαιρέτη $d \mid |G|$, υπάρχει υποομάδα $H_d \leq G$ της G έτσι ώστε:*

$$[G : H_d] = d$$

Άσκηση 16. *Θεωρούμε την n-οστή ορθογώνια ομάδα:*

$$\mathsf{O}(n, \mathbb{R}) = \big\{A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = I_n = A \cdot {}^tA\big\}$$

(1) *Δείξτε ότι το υποσύνολο*

$$\mathsf{SO}(n, \mathbb{R}) = \big\{A \in \mathsf{O}(n, \mathbb{R}) \mid |A| = 1\big\}$$

είναι μια υποομάδα της $\mathsf{O}(n, \mathbb{R})$ η οποία καλείται η ειδική n-οστή ορθογώνια ομάδα.

(2) *Να βρεθούν οι αριστερές πλευρικές κλάσεις της $\mathsf{SO}(n, \mathbb{R})$ στην $\mathsf{O}(n, \mathbb{R})$, ο δείκτης $[\mathsf{O}(n, \mathbb{R}) : \mathsf{SO}(n, \mathbb{R})]$, και τέλος να περιγραφεί το σύνολο πηλίκο $\mathsf{O}(n, \mathbb{R})/\mathcal{R}_{\mathsf{SO}(n,\mathbb{R})}$.*

Άσκηση 17. *Αν A είναι ένα πίνακας μιγαδικών αριθμών, συμβολίζουμε με A^* τον ανάστροφο συζυγή πίνακα του A ο οποίος ορίζεται ως εξής: $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $1 \leq i, j, \leq n$, όπου $\overline{a_{ji}}$ είναι ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού a_{ji}.*

Θεωρούμε τα σύνολα

$$\mathsf{U}(n, \mathbb{C}) = \big\{A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A^* \cdot A = I_n = A \cdot A^*\big\}$$

$$\mathsf{SU}(n, \mathbb{C}) = \big\{A \in \mathsf{U}(n, \mathbb{C}) \mid |A| = 1\big\}$$

(1) *Δείξτε ότι:* $\mathsf{U}(n, \mathbb{C}) \leq \mathsf{U}(n, \mathbb{C}) \leq \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$.

(2) *Βρείτε τον δείκτη* $[\mathsf{U}(n, \mathbb{C}) : \mathsf{SU}(n, \mathbb{C})]$.

(3) *Δείξτε ότι το σύνολο πηλίκο $\mathsf{U}(n, \mathbb{C})/\mathcal{R}_{\mathsf{SU}(n,\mathbb{C})}$ είναι σε «1-1» και «επί» αντιστοιχία με τον κύκλο S^1.*

Άσκηση 18. *Θεωρούμε τις προσθετικές ομάδες $(\mathbb{Z}, +)$ των ακεραίων αριθμών και $(\mathbb{Q}, +)$ των ρητών αριθμών.*

(1) *Να δειχθεί ότι για κάθε γνήσια υποομάδα $H \leq \mathbb{Z}$, ισχύει:*

$$[\mathbb{Z} : H] < \infty$$

(2) *Να δειχθεί ότι για κάθε γνήσια υποομάδα $H \leq \mathbb{Q}$, ισχύει:*

$$[\mathbb{Q} : H] = \infty$$