ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκο Ετος 2023-2024

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Πέμπτη 18 Απριλίου 2024

Άσκηση 1. (1) *Να δοθεί παράδειγμα ομάδας G άπειρης τάξης η οποία περιέχει μια κανονική υποομάδα H η οποία έχει άπειρη τάξη, έτσι ώστε η ομάδα πηλίκο G/H να έχει άπειρη τάξη.*

(2) *Να δοθεί παράδειγμα ομάδας G άπειρης τάξης η οποία περιέχει μια κανονική υποομάδα H η οποία έχει άπειρη τάξη, έτσι ώστε η ομάδα πηλίκο G/H να έχει άπειρη τάξη και όλα τα στοιχεία της να έχουν πεπερασμένη τάξη.*

(3) *Να δοθεί παράδειγμα ομάδας G άπειρης τάξης η οποία περιέχει μια κανονική υποομάδα H η οποία έχει άπειρη τάξη, έτσι ώστε η ομάδα πηλίκο G/H να έχει άπειρη τάξη και να περιέχει στοιχεία άπειρης τάξης και στοιχεία πεπερασμένης τάξης.*

(4) *Να δοθεί παράδειγμα ομάδας G άπειρης τάξης η οποία περιέχει μια κανονική υποομάδα H η οποία έχει άπειρη τάξη, έτσι ώστε η ομάδα πηλίκο G/H να έχει άπειρη τάξη και όλα τα στοιχεία της (εκτός του ουδετέρου) να έχουν άπειρη τάξη.*

Άσκηση 2. *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R}) = \big\{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \mid |A| = 1\big\}$ είναι μια κανονική υποομάδα της ομάδας $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και ακολούθως να περιγράψετε την ομάδα πηλίκο $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})/\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$.*

Άσκηση 3. *Να εξετασθεί αν η ομάδα πηλίκο G/H είναι κυκλική στις ακόλουθες περιπτώσεις:*

(1) $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ *και* $H = \big\langle([3]_4, [3]_6)\big\rangle$.

(2) $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ *και* $H = \big\langle([2]_4, [3]_6)\big\rangle$.

(3) $G = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ *και* $H = \big\langle([4]_4, [2]_6)\big\rangle$.

Άσκηση 4. *Έστω G μια ομάδα και $H \trianglelefteq G$ μια κανονική υποομάδα της G. Να δειχθούν τα ακόλουθα:*

(1) $\forall x \in G$: $x^2 \in H \iff xH = (xH)^{-1}$ *στην ομάδα πηλίκο G/H.*

(2) *Αν $m \geq 1$, τότε: $x^m \in H, \forall x \in G$, αν και μόνον αν η τάξη κάθε στοιχείου της ομάδας πηλίκο G/H είναι πεπερασμένη και διαιρέτης του m.*

(3) *Η ομάδα πηλίκο G/H είναι ομάδα στρέψης*[1] *αν και μόνον αν για κάθε στοιχείο $x \in G$, υπάρχει φυσικός $m \geq 1$ έτσι ώστε $x^m \in H$.*

(4) *Κάθε στοιχείο της ομάδας πηλίκο έχει μια τετραγωνική ρίζα*[2] *αν και μόνον αν για κάθε $x \in G$, υπάρχει $y \in G$ έτσι ώστε: $xy^2 \in H$.*

(5) *Η ομάδα πηλίκο G/H είναι κυκλική αν και μόνον αν υπάρχει ένα στοιχείο $a \in G$ το οποίο ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε στοιχείο $x \in G$, υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$: $xa^n \in H$.*

[1] δηλαδή κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη.

[2] Ένα στοιχείο x σε μια ομάδα G έχει τατραγωνική ρίζα, αν υπάρχει στοιχείο $y \in G$ έτσι ώστε $x^2 = y$.

(6) *Αν κάθε στοιχείο της ομάδας πηλίκο G/H έχει πεπερασμένη τάξη και κάθε στοιχείο της υποομάδας H έχει πεπερασμένη τάξη, τότε κάθε στοιχείο της ομάδας G έχει πεπερασμένη τάξη.*

Άσκηση 5. *Ποιές από τις ακόλουθες απεικονίσεις είναι ομομορφισμοί ομάδων; Για τις απεικονίσεις οι οποίες ορίζουν ομομορφισμό ομάδων, να βρεθεί ο πυρήνας $\mathsf{Ker}(f)$ και η εικόνα $\mathsf{Im}(f)$.*

(1) $f : \mathsf{U}_{12} \longrightarrow \mathsf{U}_{12}, \quad f(x) = x^3$.
(2) $f : \mathsf{S}_4 \longrightarrow \mathsf{S}_4, \quad f(x) = x^3$.
(3) $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \sqrt{x}$.
(4) $f : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_7, \quad f([x]_6) = [x]_7$.
(5) $f : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathsf{U}(\mathbb{Z}_7), \quad f([x]_6) = [2^x]_7$.

Παραπάνω U_n συμβολίζει την ομάδα των n-οστών ριζών της μονάδας, και $\mathsf{U}(\mathbb{Z}_n)$ συμβολίζει την ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων (ως προς τον πολλαπλασιασμό κλάσεων ισοτιμίας) της προσθετικής ομάδας $\mathbb{Z}_n$.

Άσκηση 6. *Να εξετασθεί αν στις ακόλουθες περιπτώσεις, υπάρχουν επιμορφισμοί ομάδων $G_1 \longrightarrow G_2$:*

(1) $G_1 = \mathbb{Z}_{12}$ *και* $G_2 = \mathbb{Z}_4$.
(2) $G_1 = \mathbb{Z}_{12}$ *και* $G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
(3) $G_1 = \mathsf{D}_4$ *και* $G_2 = \mathbb{Z}_4$.
(4) $G_1 = \mathsf{D}_4$ *και* $G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Άσκηση 7. *Έστω G_1 και G_2 δύο ομάδες και $H_1 \trianglelefteq G_1$ και $H_2 \trianglelefteq G_2$ κανονικές υποομάδες των G_1 G_2 αντίστοιχα.*

(1) *Να δείξετε ότι η ομάδα ευθύ γινόμενο $H_1 \times H_2$ είναι κανονική υποομάδα της ομάδας ευθύ γινομενο $G_1 \times G_2$.*
(2) *Να δείξετε ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός ομάδων:*

$$(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \xrightarrow{\cong} G_1/H_1 \times G_2/H_2$$

Άσκηση 8. *Έστω H και K δύο ομάδες. Να δείξετε ότι η ομάδα ευθύ γινόμενο $H \times K$ περιέχει κανονικές υποομάδες $H^* \trianglelefteq H \times K$ και $K^* \trianglelefteq H \times K$ έτσι ώστε:*

$$H \;\cong\; H^* \quad \& \quad K \;\cong\; K^* \quad \& \quad H^* \cap K^* = \{e_{H\times K}\} \quad \& \quad H \times K = H^*K^* = K^*H^*$$

Άσκηση 9. *Για μια ομάδα G τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η G είναι ισόμορφη με την ομάδα ευθύ γινόμενο $G_1 \times G_2$ δύο ομάδων G_1 και G_2.*
(2) *Η ομάδα G περιέχει κανονοικές υποομάδες $H_1 \trianglelefteq G$ και $H_2 \trianglelefteq G$ έτσι ώστε*

$$H_1 \;\cong G_1 \quad \& \quad H_2 \;\cong\; G_2 \quad \& \quad H_1 \cap H_2 = \{e_G\} \quad \& \quad G = H_1 \times H_2$$

Άσκηση 10. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και $f : G \longrightarrow G$ ένας αυτομορφισμός[3] της G. Αν*

$$\forall x \in G : \quad f(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x = e_G$$

να δείξετε ότι:

(1)

$$G = \{x^{-1}f(x) \in G \mid x \in G\}$$

(2) *Αν $f^2 = \mathsf{Id}_G$, τότε η G είναι αβελιανή.*

[3] Υπενθυμίζουμε ότι ένας αυτομορφισμός μιας ομάδας G είναι ένας ισομορφισμός $G \longrightarrow G$.

Άσκηση 11. *Να βρεθεί το πλήθος των αυτομορφισμών των ομάδων*

$$\mathbb{Z}_2 \quad \& \quad \mathbb{Z}_6$$

Άσκηση 12. *Να δείξετε ότι κάθε ομάδα με παραπάνω από δύο στοιχεία έχει τουλάχιστον έναν αυτομορφισμό διαφορετικό του ταυτοτικού.*

Άσκηση 13. *Έστω G μια ομάδα. Για κάθε $g \in G$, ορίζουμε μια απεικόνιση*

$$\iota_g : G \longrightarrow G, \quad \iota_g(x) = g^{-1}xg$$

(1) *Δείξτε ότι η απεικόνιση ι_g είναι ένας αυτομορφισμός της G*[4].
(2) *Δείξτε ότι το σύνολο*

$$\mathsf{Aut}(G) = \big\{ f : G \longrightarrow G \mid f : \textit{αυτομορφισμός} \big\}$$

εφοδιασμένο με την σύνθεση απεικονίσεων αποτελεί ομάδα (την ομάδα των αυτομορφισμών της G).
(3) *Δείξτε ότι το σύνολο*

$$\mathsf{Inn}(G) = \big\{ f : G \longrightarrow G \mid f : \textit{εσωτερικός αυτομορφισμός} \big\} = \big\{ \iota_g \in \mathsf{Aut}(G) \mid g \in G \big\}$$

είναι κανονική υποομάδα της $\mathsf{Aut}(G)$ (η υποομάδα των εσωτερικών αυτομορφισμών της G).
(4) *Δείξτε ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός*

$$G/\mathsf{Z}(G) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Inn}(G)$$

Άσκηση 14. (1) *Περιγράψτε όλους τους ισομορφισμούς*

$$\mathcal{V}_4 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

όπου $\mathcal{V}_4$ είναι η ομάδα του Κλειν.
(2) *Δείξτε ότι οι ομάδες $\mathbb{Z}_6$ και $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ είναι ισόμορφες.*
(3) *Περιγράψτε όλους τους ισομορφισμούς*

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_6$$

(4) *Δείξτε ότι η διεδρική ομάδα D_4 έχει ακριβώς 4 εσωτερικούς αυτομορφισμούς.*

Άσκηση 15. *Έστω G μια ομάδα και $a \in G$ ένα στοιχείο της G. Ορίζουμε απεικόνιση*

$$\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow G, \quad \phi(n) = a^n$$

Δείξτε ότι η ϕ είναι ομομορφισμός. Περιγράψτε την εικόνα $\mathrm{Im}(\phi)$ της ϕ και όλες τις δυνατότητες για τον πυρήνα $\mathsf{Ker}(\phi)$ της ϕ.

Άσκηση 16. (1) *Βρείτε έναν αυτομορφισμό της κυκλικής ομάδας $\mathbb{Z}_n$ ο οποιός να μην είναι εσωτερικός αυτομορφισμός.*
(2) *Περιγράψτε όλους τους εσωτερικούς αυτομορφισμούς της συμμετρικής ομάδας S_3.*

Άσκηση 17. *Έστω G μια αβελιανή ομάδα, και*

$$H = \{x^2 \in G \mid x \in G\} \quad \& \quad K = \{x \in G \mid x^2 = e\}$$

(1) *Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : G \longrightarrow H$, $f(x) = x^2$ είναι ένας επιμορφισμός ομάδων.*
(2) *Να βρεθεί ο πυρήνας του f.*
(3) *Δείξτε ότι οι ομάδες G/K και H είναι ισόμορφες.*

[4] ο αυτομορφισμός ι_g καλείται ο **εσωτερικός αυτομορφισμός** ο οποίος επάγεται από το στοιχείο $g \in G$.

Άσκηση 18. *Σημειώστε αν είναι σωστό* (Σ) *ή λάθος* (Λ), *δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:*

(1) *Για οποιεσδήποτε δυο ομάδες* G *και* G', *υπάρχει ένας ομομορφισμός από την* G *στην* G'.
(2) *Κάθε ομομορφισμός είναι απεικόνιση «1-1».*
(3) *Ενας ομομορφισμός είναι «1-1» αν και μόνο αν ο πυρήνας του είναι η ομάδα η οποία αποτελείται μόνο από το ταυτοτικό στοιχείο.*
(4) *Η εικόνα μιας ομάδας 6 στοιχείων μέσω ενός ομομορφισμού μπορεί να έχει 4 στοιχεία.*
(5) *Η εικόνα μιας ομάδας 6 στοιχείων μέσω ενός ομομορφισμού μπορεί να έχει 12 στοιχεία.*
(6) *Υπάρχει ένας ομομορφισμός από μια ομάδα 6 στοιχείων σε μια ομάδα 12 στοιχείων.*
(7) *Υπάρχει ένας ομομορφισμός από μια ομάδα 6 στοιχείων σε μια ομάδα 10 στοιχείων.*
(8) *῾Ενας ομομορφισμός μπορεί να έχει κενό πυρήνα.*
(9) *Δεν είναι δυνατόν να έχουμε έναν ομομορφισμό από μια άπειρη ομάδα σε μια πεπερασμένη ομάδα.*
(10) *Οποιεσδήποτε δύο ομάδες τάξης 3 είναι ισόμορφες.*
(11) *Υπάρχει, με ακρίβεια ισομορφισμού, μόνο μια κυκλική ομάδα δεδομένης πεπερασμένης τάξης.*
(12) *Οποιεσδήποτε δύο πεπερασμένες ομάδες που έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων είναι ισόμορφες.*
(13) *Κάθε ισομορφισμός είναι απεικόνιση «1-1».*
(14) *Κάθε απεικόνιση «1-1» ανάμεσα σε ομάδες είναι ισομορφισμός.*
(15) *Η ιδιότητα να είναι μια ομάδα κυκλική (ή να μην είναι κυκλική, ανάλογα με την περίπτωση) είναι μια δομική ιδιότητα*[5].
(16) *Κάθε δομική ιδιότητα μιας ομάδας πρέπει να ισχύει και για κάθε ισόμορφη ομάδα.*
(17) *Μια αβελιανή ομάδα δεν μπορεί να είναι ισόμορφη με μια μη αβελιανή ομάδα.*
(18) *Μια προσθετική ομάδα δεν μπορεί να είναι ισόμορφη με μια πολλαπλασιαστική ομάδα.*
(19) *Η προσθετική ομάδα* $\mathbb{R}$ *των πραγματικών αριθμών είναι ισόμορφη με μια πολλαπλασιαστική ομάδα* $\mathbb{R}^*$ *των μη-μηδενικών πραγματικών αριθμών.*

[5]Μια ιδιότητα (Π) η οποία αφορά ομάδες καλείται δομική ιδιότητα αν είναι συνέπεια των αξιωμάτων τα οποία ορίζουν την δομή της ομάδας. Ακριβέστερα η ιδιότητα (Π) είναι δομική ιδιότητα αν και μόνον αν μια ομάδα G ικανοποιεί την ιδιότητα (Π) αν και μόνον αν κάθε ομάδα η οποία είναι ισόμορφη με την G ικανοποιεί την ιδιότητα (Π).