ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκο Ετος 2023-2024

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 7

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Παρασκευή 26 Απριλίου 2024

Άσκηση 1. *Έστω G μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα περιττής τάξης. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$f\colon G \longrightarrow G, \quad f(x) = x^2$$

είναι ένας αυτομορφισμός της G.

Άσκηση 2. *Να εξεταστεί αν υπάρχει επιμορφισμός ομάδων*

$$\mathbb{Z}_{24} \longrightarrow \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$$

Γενικότερα να εξεταστεί αν υπάρχει επιμορφισμός ομάδων

$$\mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$$

Άσκηση 3. *Να βρεθούν όλα τα στοιχεία τάξης 6 στην ομάδα ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$.*

Άσκηση 4. *Να βρεθούν όλοι οι επιμορφισμοί ομάδων*

$$\mathbb{Z}_{24} \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \quad \text{και} \quad \mathbb{Z}_{28} \longrightarrow \mathbb{Z}_6 \quad \text{και} \quad \mathbb{Z}_{20} \longrightarrow \mathbb{Z}_8$$

και ακολούθως να προσδιορισθεί ο πυρήνας για κάθε έναν από αυτούς.

Άσκηση 5. *Έστω H_1 και H_2 υποομάδες των ομάδων G_1 και G_2 αντίστοιχα.*

(1) *Να δειχθεί ότι η ομάδα $H_1 \times H_2$ είναι υποομάδα της ομάδας ευθύ γινόμενο $G_1 \times G_2$.*
(2) *Αν οι υποομάδες H_1 και H_2 είναι κανονικές υποομάδες των ομάδων G_1 και G_2 αντίστοιχα, να δειχθεί ότι η υποομάδα $H_1 \times H_2$ είναι κανονική υποομάδα της ομάδας ευθύ γινόμενο $G_1 \times G_2$ και ακολούθως να περιγραφεί η ομάδα πηλίκο $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$.*

Άσκηση 6. (1) *Βρείτε την τάξη της ομάδας πηλίκο $(\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{15})/\langle([1]_{11}, [1]_{15})\rangle$.*
(2) *Βρείτε την τάξη του στοιχείου $([2]_6, [0]_8) + \langle([4]_6, [4]_8)\rangle$ στην ομάδα πηλίκο $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8)/\langle([4]_6, [4]_8)\rangle$.*

Άσκηση 7. *Έστω G μια ομάδα. Μια υποομάδα H της G καλείται* **συζυγής προς μια υποομάδα** *K της G αν υπάρχει ένας εσωτερικός αυτομορφισμός i_g της G, τέτοιος ώστε $\mathsf{i}_g(H) = K$.*

(1) *Δείξτε ότι η συζυγία είναι μια σχέση ισοδυναμίας στη συλλογή των υποομάδων της G.*
(2) *Βρείτε όλες τις υποομάδες της S_3 που είναι συζυγείς προς την υποομάδα $\langle(13)\rangle$.*

Άσκηση 8. *Δείξτε ότι μια τομή κανονικών υποομάδων μιας ομάδας G είναι πάλι κανονική υποομάδα της G. Στη συνέχεια δείξτε ότι αν H είναι μια υποομάδα μια ομάδας G, τότε το σύνολο*

$$N(H) = \bigcap \big\{ N \trianglelefteq G \mid H \leq N \big\}$$

είναι η μικρότερη κανονική υποομάδα της G η οποία περιέχει την H.

Άσκηση 9. *Βρείτε με ποιες γνωστές σας ομάδες είναι ισόμορφες οι παρακάτω ομάδες πηλίκα.*

(1) $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8)/\langle([1]_4, [2]_8)\rangle$
(2) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle(0,1)\rangle$
(3) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle(1,2)\rangle$
(4) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle(1,1,1)\rangle$
(5) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4)/\langle(3,0,[0]_4)\rangle$
(6) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle(3,3,3)\rangle$

Άσκηση 10. *Περιγράψτε όλες τις υποομάδες H τάξης ≤ 4 της $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, και σε κάθε περίπτωση ταξινομήστε την ομάδα-πηλίκο $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)/H$ (δηλαδή προσδιορίστε με ποιά γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη).*

Άσκηση 11. (1) *Να βρεθούν όλες οι υποομάδες της ομάδας $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*
(2) *Να βρεθούν όλες οι υποομάδες της ομάδας $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.*
(3) *Να βρεθούν όλες οι υποομάδες της ομάδας $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ οι οποίες είναι ισόμορφες με την ομάδα του Klein.*

Άσκηση 12. *Έστω $\mathcal{F}$ η προσθετική ομάδα όλων των συναρτήσεων μέσω των οποίων απεικονίζεται το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$:*

$$\mathcal{F} = \big\{ f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \big\}, \qquad \textit{όπου} \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

και έστω $\mathcal{F}^*$ η πολλαπλασιαστική ομάδα όλων των στοιχείων του F που δεν παίρνουν την τιμή 0 σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}^* = \big\{ f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \big\}, \qquad \textit{όπου} \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(1) *Έστω $\mathcal{C}$ η υποομάδα της $\mathcal{F}$ που αποτελείται από τις σταθερές συναρτήσεις. Βρείτε μια υποομάδα της $\mathcal{F}$ με την οποία η $\mathcal{F}/\mathcal{C}$ να είναι ισόμορφη.*
(2) *Έστω $\mathcal{C}^*$ η υποομάδα της $\mathcal{F}^*$ που αποτελείται από τις μη μηδενικές σταθερές συναρτήσεις. Βρείτε μια υποομάδα της $\mathcal{F}^*$ με την οποία η $\mathcal{F}^*/\mathcal{C}^*$ να είναι ισόμορφη.*
(3) *Έστω $\mathcal{C}$ η υποομάδα των συνεχών συναρτήσεων στην $\mathcal{F}$. Μπορείτε να βρείτε ένα στοιχείο της $\mathcal{F}/\mathcal{C}$ που να έχει τάξη 2; Γιατί;*
(4) *Έστω $\mathcal{C}^*$ η υποομάδα των συνεχών συναρτήσεων στην $\mathcal{F}^*$. Μπορείτε να βρείτε ένα στοιχείο της $\mathcal{F}^*/\mathcal{C}^*$ που να έχει τάξη 2; Γιατί;*
(5) *Θεωρούμε την $\mathcal{C}^*$ όπως στο προηγούμενο ερώτημα. Περιγράψτε όλα τα $n \in \mathbb{Z}^+$ για τα οποία η $\mathcal{F}^*/\mathcal{C}^*$ έχει ένα στοιχείο τάξης n.*

Άσκηση 13. *Να δοθεί παράδειγμα ομάδας G η οποία περιέχει κανονικές υποομάδες H και K, έτσι ώστε:*

$$H \ \cong \ K \qquad\qquad \textit{και} \qquad\qquad G/H \ \ncong \ G/K$$

Άσκηση 14. (Γενική Μορφή 4ου Θεωρήματος Ισομορφισμών Ομάδων) *Έστω $f \colon G \longrightarrow G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Να δείξετε ότι η απεικόνιση*

$$\Phi : \ \big\{ \textit{Υποομάδες } H \textit{ της } G \textit{ έτσι ώστε}: \ \mathsf{Ker}(f) \leq H \big\} \quad \longrightarrow \quad \big\{ \textit{Υποομάδες } K \textit{ της } G' \textit{ έτσι ώστε}: \ K \leq \mathsf{Im}(f) \big\}$$

όπου: $\Phi(H) = f(H)$ είναι «1-1» και «επί».

Να περιγραφεί η παραπάνω «1-1» και «επί» αντιστοιχία, στην περίπτωση $G = \mathsf{S}_3$, $G' = \mathbb{Z}_2$, και $f\colon \mathsf{S}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ είναι ο ομομορφισμός ο οποίος στέλνει κάθε μετάθεση στο πρόσημό της.

Άσκηση 15. *Έστω H μια κανονική υποομάδα μιας ομάδας G, και υποθέτουμε ότι $[G : H] = m$. Δείξτε ότι $a^m \in H$ για κάθε $a \in G$.*

Άσκηση 16. *Έστω $n, m \geq 1$. Αφού δείξετε ότι*

$$n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = (n,m)\mathbb{Z} \qquad \text{και} \qquad n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = [n,m]\mathbb{Z}$$

να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό

$$(n,m)\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \;\cong\; n\mathbb{Z}/[n,m]\mathbb{Z}$$

Άσκηση 17. *Έστω G μια ομάδα. Θέτουμε $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$, $\forall a, b \in G$, και έστω*

$$[G,G] = \big\langle \{[x,y] \in G \mid x, y \in G\} \big\rangle$$

η υποομάδα της G η οποία παράγεται από το σύνολο όλων των στοιχείων της μορφής $[x,y]$, $x, y \in G$.

(1) *Να δείξετε ότι η $[G,G]$ είναι κανονική υποομάδα της G και η ομάδα πηλίκο $G/[G,G]$ είναι αβελιανή.*
(2) *Αν H είναι μια κανονική υποομάδα της G, τότε η ομάδα πηλίκο G/H είναι αβελιανή αν και μόνον αν $[G,G] \subseteq H$.*
(3) *Κάθε ομομορφισμός ομάδων $f\colon G \longrightarrow G'$, όπου η G' είναι αβελιανή, ορίζει έναν μοναδικό ομομορφισμό ομάδων $\widetilde{f}\colon G/[G,G] \longrightarrow G'$ έτσι ώστε: $\widetilde{f}(x[G,G]) = f(x)$.*

Άσκηση 18. *Έστω $H \leq G$ μια, όχι απαραίτητα κανονική, υποομάδα της ομάδας G και έστω G/H το σύνολο των αριστερών συμπλόκων της H στην G:*

$$G/H = \big\{xH \subseteq G \mid x \in G\big\}$$

(το σύνολο G/H δεν είναι ομάδα αν η υποομάδα H δεν είναι κανονική).

(1) *Να δείξετε ότι υπάρχει ένας ομομορφισμός ομάδων*

$$\widetilde{\mathsf{L}} :\; G \;\longrightarrow\; S(G/H), \quad \widetilde{\mathsf{L}}(g) = \widetilde{\mathsf{l}}_g$$

όπου:

$$\widetilde{\mathsf{l}}_g :\; G/H \;\longrightarrow\; G/H, \quad \widetilde{\mathsf{l}}_g(xH) = gxH$$

του οποίου ο πυρήνας είναι η μεγαλύτερη κανονική υποομάδα της G η οποία περιέχεται στην H.
(2) *Αν $[G : H] = n$, να συμπεράνετε ότι η ομάδα πηλίκο $G/\mathsf{Ker}(f)$ είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της συμμετρικής ομάδας S_n.*
(3) *Αν η ομάδα G είναι πεπερασμένη και $\mathsf{o}(G) \nmid [G : H]!$, τότε να δείξετε ότι η H περιέχει μια μη-τετριμμένη κανονική υποομάδα της G.*
(4) *Αν $\mathsf{o}(G) = 36$, να δείξετε ότι κάθε υποομάδα H της G με τάξη 9 περιέχει μια μη-τετριμμένη κανονική υποομάδα της G.*
(5) *Αν $\mathsf{o}(G) = 99$, να δείξετε ότι κάθε υποομάδα H της G με τάξη 11 περιέχει μια μη-τετριμμένη κανονική υποομάδα της G.*

Άσκηση 19. *Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα G είναι ισόμορφη με μια υποομάδα μιας κατάλληλης εναλλάσσουσας ομάδας A_n.*

Άσκηση 20. *Να βρεθεί η δεξιά κανονική αναπαράσταση της κυκλικής ομάδας τάξης 3.*

Άσκηση 21. *Να βρεθεί η δεξιά κανονική αναπαράσταση της ομάδας του Klein.*