ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκο Ετος 2023-2024

Επιλυση Ασκησεων - Φυλλαδιο 1

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Δευτέρα 4 Μαρτίου 2024

Άσκηση 1. *Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}$ *ορίζουμε μια σχέση* $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *ως εξής:*

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{R}$ *είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο* $\mathbb{R}$*, και να περιγράψετε το σύνολο πηλίκο* $\mathbb{R}/\mathcal{R}$*.*

Λύση. Χάριν απλότητας γράφουμε: «$\sim$» αντί «$\sim_{\mathcal{R}}$», $[x]$ αντί $[x]_{\mathcal{R}}$, κτλ.

Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ έχουμε:

- Ανακλαστική ιδιότητα: δηλαδή $\boxed{x \sim x}$:
Επειδή $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$ έπεται ότι $x \sim x$.

- Συμμετρική ιδιότητα: δηλαδή $\boxed{x \sim y \implies y \sim x}$:
Αν $x \sim y$ τότε

$$x - y \in \mathbb{Q} \implies y - x \in \mathbb{Q} \implies y \sim x$$

- Μεταβατική ιδιότητα: δηλαδή $\boxed{x \sim y \text{ και } y \sim z \implies x \sim z}$:
Επειδή $x \sim y$ και $y \sim z$, έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l} x - y \in \mathbb{Q} \\ \\ y - z \in \mathbb{Q} \end{array}\right. \implies x - z \in \mathbb{Q} \implies x \sim z$$

Άρα η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}$. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε η κλάση ισοδυναμίας $[x]$ του x ως προς τη σχέση $\mathcal{R}$ είναι το ακόλουθο σύνολο:

$$\begin{aligned} [x] &= \{y \in \mathbb{R} \mid x \sim y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid x - y \in \mathbb{Q}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid x - y = r \in \mathbb{Q}\} \\ &= \{x - r \in \mathbb{R} \mid r \in \mathbb{Q}\} \\ &= \{x + r \in \mathbb{R} \mid r \in \mathbb{Q}\} \\ &:= x + \mathbb{Q} \end{aligned}$$

και άρα το σύνολο πηλίκο του $\mathbb{R}$ ως προς την $\mathcal{R}$ είναι

$$\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x + \mathbb{Q} \mid x \in \mathbb{R}\}$$

■

Άσκηση 2. *Στο σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ως εξής:*

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Q}$, και υπάρχει μια «1-1» και «επί» επεικόνιση

$$f : \mathbb{Q}/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0,1)$$

Λύση. Χάριν απλότητας γράφουμε: «$\sim$» αντί «$\sim_{\mathcal{R}}$», $[x]$ αντί $[x]_{\mathcal{R}}$, κτλ.

Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{Q}$ έχουμε:

• Ανακλαστική ιδιότητα: δηλαδή $\boxed{x \sim x}$:
Επειδή $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ έπεται ότι $x \sim x$.

• Συμμετρική ιδιότητα: δηλαδή $\boxed{x \sim y \implies y \sim x}$:
Αν $x \sim y$ τότε

$$x - y \in \mathbb{Z} \implies y - x \in \mathbb{Z} \implies y \sim x$$

• Μεταβατική ιδιότητα: δηλαδή $\boxed{x \sim y \text{ και } y \sim z \implies x \sim z}$:
Επειδή $x \sim y$ και $y \sim z$ έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l} x - y \in \mathbb{Z} \\ \\ y - z \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \implies x - z \in \mathbb{Z} \implies x \sim z$$

Άρα η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Q}$. Έστω $x \in \mathbb{Q}$. Τότε η κλάση ισοδυναμίας του x ως προς τη σχέση $\mathcal{R}$ είναι το ακόλουθο σύνολο:

$$\begin{aligned} [x]_{\mathcal{R}} &= \{y \in \mathbb{Q} \mid x \sim y\} \\ &= \{y \in \mathbb{Q} \mid x - y \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{y \in \mathbb{Q} \mid x - y = m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x - m \in \mathbb{Q} \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x + m \in \mathbb{Q} \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ &:= x + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

και άρα το σύνολο πηλίκο του $\mathbb{Q}$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ είναι

$$\mathbb{Q}/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} \mid x \in \mathbb{Q}\} = \{x + \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

Για να περιγράψουμε αναλυτικότερα το σύνολο-πηλίκο $\mathbb{Q}/\mathcal{R}$, σταθεροποιούμε έναν ρητό αριθμό $x = \frac{p}{q}$, όπου προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q > 0$. Από την Ευκλείδια διαίρεση έπεται ότι:

$$\text{υπάρχουν} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \quad \text{έτσι ώστε :} \qquad p = \alpha \cdot q + \beta, \qquad \text{όπου} \qquad 0 \leq \beta < q$$

Επομένως θα έχουμε $0 \leq \frac{\beta}{q} < 1$, και τότε

$$x = \frac{p}{q} = \frac{a \cdot q + \beta}{q} = a + \frac{\beta}{q} \implies x - \frac{\beta}{q} = a \in \mathbb{Z} \implies x \sim_{\mathcal{R}} \frac{\beta}{q}$$

Επομένως

$$[x] = [\frac{\beta}{q}], \qquad \text{όπου} \qquad \frac{\beta}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$$

Η παραπάνω ανάλυση μας επιτρέπει να ορίσουμε μια αντιστοιχία

$$f : \mathbb{Q}/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0,1), \quad [\frac{p}{q}] \longmapsto f([\frac{p}{q}]) = \frac{\beta}{q}$$

όπου $p = \alpha \cdot q + \beta$ και $0 \leq \frac{\beta}{q} < 1$. Θα δείξουμε ότι η f είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση:

• <u>Η f είναι καλά ορισμένη</u>: Έστω $[x],[y] \in \mathbb{Q}/\mathcal{R}$, όπου $x = \frac{p}{q}$ και $y = \frac{p'}{q'}$, και έστω ότι $[x] = [y]$, δηλαδή $[\frac{p}{q}] = [\frac{p'}{q'}]$. Επειδή όπως παραπάνω μπορούμε να γράψουμε

$$[\frac{p}{q}] = [\frac{\beta}{q}] \quad \text{και} \quad [\frac{p'}{q'}] = [\frac{\beta'}{q'}]$$

όπου $p = \alpha \cdot q + \beta$, $0 \leq \beta < q$ και $p' = \alpha' \cdot q' + \beta'$, $0 \leq \beta' < q'$, έπεται ότι

$$[\frac{\beta}{q}] = [\frac{\beta'}{q'}] \implies \frac{\beta}{q} - \frac{\beta'}{q'} = k \in \mathbb{Z} \implies \frac{\beta}{q} = \frac{\beta'}{q'} + k \implies 0 \leq \frac{\beta'}{q'} + k < 1$$

Επειδή $k \in \mathbb{Z}$ από την τελευταία ανισότητα έπεται προφανώς ότι $k = 0$ και άρα

$$\frac{\beta}{q} = \frac{\beta'}{q'} \implies f([\frac{p}{q}]) = f([\frac{p'}{q'}]) \implies f([x]) = f([y])$$

Επομένως η f είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση. Θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1 και επί.

• <u>Η f είναι 1-1</u>: Έστω $f([\frac{p}{q}]) = f([\frac{p'}{q'}])$ όπου όπως παραπάνω $\frac{p}{q} = \alpha + \frac{\beta}{q}$ και $\frac{p'}{q'} = \alpha' + \frac{\beta'}{q'}$. Τότε $\frac{\beta}{q} = \frac{\beta'}{q'}$ και άρα έχουμε:

$$\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} = \alpha - \alpha' \in \mathbb{Z} \implies [\frac{p}{q}] = [\frac{p'}{q'}]$$

Συνεπώς η f είναι ένα προς ένα.

• <u>Η f είναι επί</u>: Για κάθε ρητό αριθμό $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, επειδή $0 \leq \frac{p}{q} < 1$, θα έχουμε προφανώς ότι $\frac{p}{q} = 0 + \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$. Άρα $f([\frac{p}{q}]) = \frac{p}{q}$, δηλαδή η f είναι επί.

Άρα δείξαμε ότι υπάρχει μια καλά ορισμένη 1-1 και επί απεικόνιση $f : \mathbb{Q}/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0,1)$. Επομένως μέσω της f τα στοιχεία των συνόλων $\mathbb{Q}/\mathcal{R}$ και $\mathbb{Q} \cap [0,1)$ είναι σε «1-1» και «επί» αντιστοιχία. ■

Στην επόμενη Άσκηση θα χρειαστούμε τις ακόλουθες έννοιες. Έστω $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ μια σχέση ισοδυναμίας επί ενός συνόλου X, και υποθέτουμε ότι το σύνολο X είναι εφοδιασμένο με μια (διμελή) πράξη

$$\star \colon X \times X \longrightarrow X$$

(1) Η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ καλείται **συμβιβαστή με την πράξη** $\star$ επί του X, αν ισχύει ότι:

$$\forall x, y, z, w \in X : \quad x \sim_{\mathcal{R}} y \ \ \& \ \ z \sim_{\mathcal{R}} w \quad \implies \quad x \star z \sim_{\mathcal{R}} y \star w$$

(2) Ένα στοιχείο $e \in X$ καλείται **ουδέτερο στοιχείο** για την πράξη «$\star$» επί του X, αν:

$$\forall a \in X : \quad e \star a = a = a \star e$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο για την πράξη «$\star$» επί του X, τότε αυτό είναι μοναδικό.

(3) Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e για την πράξη «$\star$» επί του X, και αν $a \in X$, τότε ένα στοιχείο $a' \in X$ καλείται **αντίστροφο** του στοιχείου a, αν:

$$a \star a' = e = a' \star a$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν υπάρχει αντίστροφο στοιχείο του a ως προς την πράξη «$\star$», τότε αυτό είναι μοναδικό.

Άσκηση 3. *Έστω ότι $\star \colon X \times X \longrightarrow X$ μια πράξη επί του συνόλου X, και έστω $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου X η οποία είναι συμβιβαστή με την πράξη «$\star$».*

1. *Ορίζοντας*

$$\widetilde{\star} : X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} \longrightarrow X/\mathcal{R}, \qquad \widetilde{\star}([x]_{\mathcal{R}}, [y]_{\mathcal{R}}) := [x]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [y]_{\mathcal{R}} = [x \star y]_{\mathcal{R}}$$

αποκτούμε μια πράξη «$\widetilde{\star}$» επί του συνόλου-πηλίκο $X/\mathcal{R}$.

2. *Αν η πράξη «$\star$» επί του X είναι προσεταιριστική ή μεταθετική, τότε η πράξη «$\widetilde{\star}$» επί του $X/\mathcal{R}$ είναι προσεταιριστική ή μεταθετική αντίστοιχα.*

3. *Έστω $e \in X$ ένα ουδέτερο στοιχείο για την πράξη «$\star$» επί του X. Τότε το στοιχείο $[e]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R}$ είναι ουδέτερο στοιχείο για την πράξη «$\widetilde{\star}$» επί του $X/\mathcal{R}$.*

4. *Υποθέτουμε ότι η πράξη «$\star$» έχει ένα ουδέτερο στοιχείο $e \in X$, και έστω x ένα στοιχείο του X για το οποίο υπάρχει ένα αντίστροφο στοιχείο $x' \in X$ ως προς την πράξη «$\star$». Τότε το στοιχείο $[x']_{\mathcal{R}}$ είναι ένα αντίστροφο στοιχείο του $[x]_{\mathcal{R}}$ για την πράξη «$\widetilde{\star}$» επί του $X/\mathcal{R}$.*

Λύση. **1.** Αρκεί το αποτέλεσμα της πράξης $[x]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [y]_{\mathcal{R}} = [x \star y]_{\mathcal{R}}$, $\forall x, y \in X$, να είναι ανεξάρτητο της επιλογής αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυναμίας. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\forall x, y, z, w \in X: \quad [x]_{\mathcal{R}} = [z]_{\mathcal{R}} \quad \text{και} \quad [y]_{\mathcal{R}} = [w]_{\mathcal{R}} \quad \Longrightarrow \quad [x \star y]_{\mathcal{R}} = [z \star w]_{\mathcal{R}}$$

Τότε προφανώς αρκεί να δείξουμε ισοδύναμα ότι

$$\forall x, y, z, w \in X: \quad x \sim_{\mathcal{R}} z \quad \text{και} \quad y \sim_{\mathcal{R}} w \quad \Longrightarrow \quad x \star y \ \sim_{\mathcal{R}} \ z \star w$$

Η τελευταία συνεπαγωγή όμως ισχύει ακριβώς διότι από την υπόθεση η σχέση $\mathcal{R}$ είναι συμβιβαστή με την πράξη «$\star$».

2. Υποθέτουμε ότι η πράξη «$\star$» επί του X είναι μεταθετική. Τότε η πράξη «$\widetilde{\star}$» επί του $X/\mathcal{R}$ είναι μεταθετική διότι, $\forall\, [x]_{\mathcal{R}},\ [y]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R}$:

$$[x]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [y]_{\mathcal{R}} = [x \star y]_{\mathcal{R}} = [y \star x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [x]_{\mathcal{R}}$$

Παρόμοια αν η πράξη «$\star$» επί του X είναι προσεταιριστική, τότε η πράξη «$\widetilde{\star}$» επί του $X/\mathcal{R}$ είναι προσεταιριστική διότι, $\forall\, [x]_{\mathcal{R}},\ [y]_{\mathcal{R}},\ [z]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R}$:

$$[x]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} \big([y]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [z]_{\mathcal{R}}\big) = [x] \widetilde{\star} [y \star z]_{\mathcal{R}} = [x \star (y \star z)]_{\mathcal{R}} = [(x \star y) \star z]_{\mathcal{R}} = [x \star y]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [z]_{\mathcal{R}} = \big([x]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [y]_{\mathcal{R}}\big) \widetilde{\star} [z]_{\mathcal{R}}$$

3. Αν $e \in X$ είναι ουδέτερο στοιχείο της πράξης «$\star$», τότε το στοιχείο $[e]_{\mathcal{R}}$ είναι ουδέτερο στοιχείο για την πράξη «$\widetilde{\star}$» επί του $X/\mathcal{R}$ διότι, $\forall\, [x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R}$:

$$[x]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [e]_{\mathcal{R}} = [x \star e]_{\mathcal{R}} = [x]_{\mathcal{R}} = [e \star x]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [x]_{\mathcal{R}}$$

4. Υποθέτουμε ότι η πράξη «$\star$» έχει ένα ουδέτερο στοιχείο $e \in X$, και έστω x ένα στοιχείο του X με αντίστροφο στοιχείο $x' \in X$ ως προς την πράξη «$\star$». Τότε θα έχουμε:

$$[x]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [x']_{\mathcal{R}} = [x \star x']_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}} = [x' \star x]_{\mathcal{R}} = [x']_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [x]_{\mathcal{R}}$$

και επομένως το στοιχείο $[x']_{\mathcal{R}}$ είναι ένα αντίστροφο στοιχείο του $[x]_{\mathcal{R}}$ για την πράξη «$\widetilde{\star}$» επί του $X/\mathcal{R}$. ■

Άσκηση 4. *Θεωρούμε το υποσύνολο $\mathcal{S} = \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\big\}$ του συνόλου $\mathbb{C}^*$ των μη-μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Στο $\mathbb{C}^*$ ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R}$ ως εξής:*

$$z \sim_{\mathcal{R}} w \quad \Longleftrightarrow \quad zw^{-1} \in \mathcal{S}$$

1. *Να δείξετε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{C}^*$, και ακολούθως να περιγραφεί το σύνολο-πηλίκο $\mathbb{C}^*/\mathcal{R}$.*

2. *Είναι το υποσύνολο $\mathcal{S}$ κλειστό ως προς την πράξη πολλαπλασιασμού «$\cdot$» στο σύνολο $\mathbb{C}^*$;*

3. *Είναι η πράξη πολλαπλασιασμού «$\cdot$» στο σύνολο $\mathbb{C}^*$ συμβιβαστή[1] με την σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$;*

Λύση. Παρατηρούμε ότι: $z \sim_{\mathcal{R}} w \iff zw^{-1} \in \mathcal{S} \iff |zw^{-1}| = 1 \iff |z||w^{-1}| = 1 \iff |z||w|^{-1} = 1 \iff |z| = |w|$.

1. Έστω $y, z, w \in \mathbb{C}^*$. Έχουμε:

- <u>Ανακλαστική ιδιότητα</u>: $y \sim_{\mathcal{R}} y$, αφού $|y| = |y|$.
- <u>Συμμετρική ιδιότητα</u>: Αν $y \sim_{\mathcal{R}} z$, δηλαδή $|y| = |z|$, τότε και $|z| = |y|$. Επομένως, $z \sim_{\mathcal{R}} y$.

[1] Μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ επί ενός συνόλου X το οποίο είναι εφοδιασμένο με μια πράξη $\star\colon X \times X \longrightarrow X$ καλείται **συμβιβαστή με την πράξη** «$\star$» επί του X, αν ισχύει ότι:

$$\forall x, y, z, w \in X: \quad x \sim_{\mathcal{R}} y \ \ \& \ \ z \sim_{\mathcal{R}} w \quad \Longrightarrow \quad x \star z \sim_{\mathcal{R}} y \star w$$

• <u>Μεταβατική ιδιότητα</u>: Έστω $y \sim_{\mathcal{R}} z$ και $z \sim_{\mathcal{R}} w$, δηλαδή $|y| = |z|$ και $|z| = |w|$. Τότε $|y| = |w|$. Επομένως, $y \sim_{\mathcal{R}} w$.

Άρα η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{C}^*$.

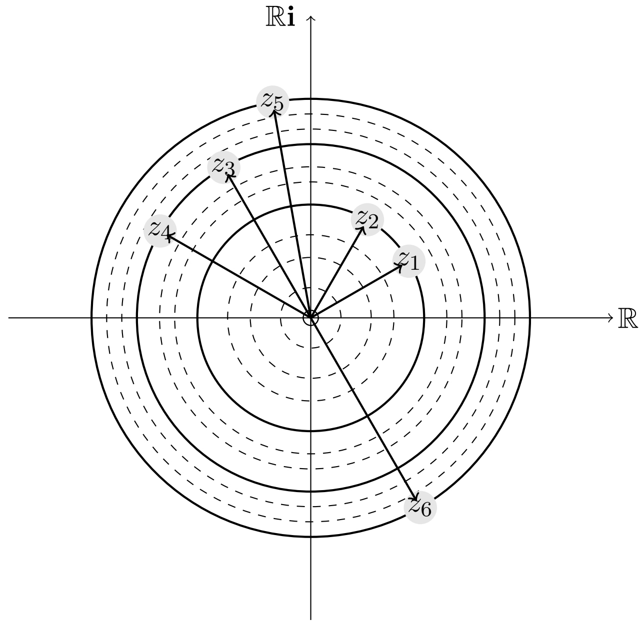
Το σύνολο πηλίκο του $\mathbb{C}^*$ ως προς την $\mathcal{R}$ είναι

$$\mathbb{C}^*/\mathcal{R} = \big\{[z]_{\mathcal{R}} \mid z \in \mathbb{C}^*\big\}$$

όπου η κλάση ισοδυναμίας του $z \in \mathbb{C}^\star$ ως προς τη σχέση $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο:

$$[z]_{\mathcal{R}} = \big\{w \in \mathbb{C}^* \mid z \sim_{\mathcal{R}} w\big\} = \big\{w \in \mathbb{C}^* \mid |z| = |w|\big\}$$

<u>Γεωμετρικά</u>: η κλάση τού $z \in \mathbb{C}^\star$ είναι η περιφέρεια με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων τού μιγαδικού επιπέδου και ακτίνα το μέτρο του z. Το σύνολο-πηλίκο (πηλικοσύνολο) $\mathbb{C}^*/\mathcal{R}$ είναι το σύνολο όλων αυτών των ομόκεντρων περιφερειών.



Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζεται το μιγαδικό επίπεδο ή επίπεδο Γαυσς και το πηλικοσύνολο $\mathbb{C}^*/\mathcal{R}$. Μιγαδικοί αριθμοί z, z' με $[z]_{\mathcal{R}} = [z']_{\mathcal{R}}$, δηλαδή με το ίδιο μέτρο $|z| = |z'|$, κείνται πάνω στην ίδια περιφέρεια τού επιπέδου Γαυσς, η οποία έχει ως κέντρο την αρχή των συντεταγμένων και ακτίνα $|z|$. Για παράδειγμα, στο σχήμα είναι $|z_1| = |z_2|$, $|z_3| = |z_4|$ και $|z_5| = |z_6|$.

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι <u>γεωμετρικά</u> το σύνολο πηλίκο $\mathbb{C}^*/\mathcal{R}$ «ταυτίζεται» με το σύνολο των περιφερειών που περιγράψαμε προηγούμενα στο επίπεδο τού Gauss.

<u>Αλγεβρικά</u>: Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^+$ των θετικών πραγματικών αριθμών και την «αντιστοιχία»

$$f : \mathbb{C}^*/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad [z]_{\mathcal{R}} \mapsto \quad f([z]_{\mathcal{R}}) := |z|.$$

• Η f είναι μια απεικόνιση, αφού είναι ανεξάρτητη από τον αντιπρόσωπο τής κλάσης $[z]_{\mathcal{R}}$, μολονότι **ορίστηκε μέσω ενός συγκεκριμένου αντιπροσώπου!**. Πράγματι αν, $z' \in [z]_{\mathcal{R}}$, δηλαδή $[z']_{\mathcal{R}} = [z]_{\mathcal{R}}$, τότε $|z'| = |z|$ και γι' αυτό $f([z']_{\mathcal{R}}) = f([z]_{\mathcal{R}})$.
• Η f είναι μια «επί» απεικόνιση, αφού αν $r \in \mathbb{R}^+$, τότε υπάρχει κλάση $[z]_{\mathcal{R}} \in \mathbb{C}^*/\mathcal{R}$ με $f([z]_{\mathcal{R}}) := |z| = r$. Πράγματι, αρκεί να θυμηθούμε ότι $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{C}^\star$, αφού $r = r + 0i$, και να θεωρήσουμε την κλάση $[r]_{\mathcal{R}}$, η εικόνα τής οποίας είναι προφανώς η $f(r) = |r| = r$.
• Η f είναι μια «1-1» απεικόνιση, αφού αν $f([z]_{\mathcal{R}}) = f([z']_{\mathcal{R}})$, όπου $[z]_{\mathcal{R}}, [z']_{\mathcal{R}} \in \mathbb{C}^*/\mathcal{R}$, τότε επειδή $f([z]_{\mathcal{R}}) = |z|$ και $f([z']_{\mathcal{R}}) = |z'|$, έπεται $|z| = |z'|$ και γι' αυτό $z \sim_{\mathcal{R}} z'$. Συνεπώς $[z]_{\mathcal{R}} = [z']_{\mathcal{R}}$ και η f είναι μια «1-1» απεικόνιση.

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι <u>αλγεβρικά</u> το σύνολο πηλίκο $\mathbb{C}^*/\mathcal{R}$ «ταυτίζεται» με το σύνολο $\mathbb{R}^+$.

2. Το υποσύνολο $\mathcal{S}$ είναι κλειστό ως προς την πράξη πολλαπλασιασμού «$\cdot$» στο σύνολο $\mathbb{C}^*$ αφού αν $z, w \in \mathcal{S}$ τότε $|zw| = |z| \cdot |w| = 1$, δηλαδή $zw \in \mathcal{S}$.

3. Για να είναι η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ συμβιβαστή με την πράξη πολλαπλασιασμού $\cdot : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, θα πρέπει $\forall x, y, z, w \in \mathbb{C}^*$ με $x \sim_{\mathcal{R}} z$ και $y \sim_{\mathcal{R}} w$, δηλαδή με $|x| = |z|$ και $|y| = |w|$, να ισχύει $x \cdot y \sim_{\mathcal{R}} z \cdot w$.

Προφανώς αν, $|x| = |z|$ και $|y| = |w|$, τότε $|x \cdot y| = |z \cdot w|$ και επομένως $x \cdot y \sim_{\mathcal{R}} z \cdot w$ και γι' αυτό η συγκεκριμένη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ στο σύνολο $\mathbb{C}^*$ είναι συμβιβαστή με την πράξη πολλαπλασιασμού «$\cdot$». ■

Άσκηση 5. *Να εξεταστεί, ποια από τα ακόλουθα υποσύνολα τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ορίζουν μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ επί του συνόλου των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z}$ και για κάθε σχέση ισοδυναμίας φ να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας καθώς και η προκύπτουσα διαμέριση του συνόλου $\mathbb{Z}$:*

(1) $g_1 = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$,
(2) $g_2 = \{(z, z+1) \mid z \in \mathbb{Z}\}$,
(3) $g_3 = \{(z+1, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$,
(4) $g_4 = g_1 \cup g_2$,
(5) $g_5 = g_1 \cup g_2 \cup g_3$
(6) $g_6 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$,
(7) $g_7 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$,
(8) $g_8 = g_1 \cup g_7$,
(9) $g_9 = g_1 \cup g_7 \cup \{(7, 8), (8, 7)\}$,
(10) $g_{10} = g_1 \cup g_7 \cup \{(3, 4), (4, 3)\}$.

Λύση. (1) Το σύνολο $g_1 = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Για κάθε $z \in \mathbb{Z}$ οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι $[z] = \{z\}$ και άρα $\mathbb{Z} = \cup_{z \in \mathbb{Z}}[z]$.

(2) Το σύνολο $g_2 = \{(z, z+1) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας αφού για κάθε $z \in \mathbb{Z}$ το $(z, z) \notin g_2$.

(3) Όμοια με το σύνολο g_2 έχουμε ότι το σύνολο $g_3 = \{(z+1, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας.

(4) Το σύνολο $g_4 = g_1 \cup g_2$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας διότι για παράδειγμα το στοιχείο $(0, 1) \in g_4$ ενώ το $(1, 0) \notin g_4$ και άρα δεν ισχύει η συμμετρική ιδιότητα.

(5) Το σύνολο $g_5 = g_1 \cup g_2 \cup g_3$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{Z}$, διότι αν και ικανοποιεί προφανώς την ανακλαστική και συμμετρική ιδιότητα (δηλαδή $(z, z) \in g_5$, $\forall z \in \mathbb{Z}$ και $(z, w) \in g_5 \implies (w, z) \in g_5$, $\forall z, w \in \mathbb{Z}$), δεν ικανοποιεί την μεταβατική ιδιότητα. Πράγματι έχουμε $(0, 1) \in g_5$ και $(1, 2) \in g_5$ αλλά $(0, 2) \notin g_5$.

(6) Το στοιχείο $(1, 2) \in g_6$ αλλά το $(2, 1) \notin g_6$ και άρα το σύνολο $g_6 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας.

(7) Για παράδειγμα τα στοιχεία $(1, 2), (2, 1) \in g_7$ αλλά το $(1, 1) \notin g_7$ και άρα το σύνολο g_7 δεν είναι σχέση ισοδυναμίας.

(8) Το σύνολο $g_8 = g_1 \cup g_7$ είναι σχέση ισοδυναμίας και οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι $[1] = [2] = [3] = \{1, 2, 3\}$ και τα μονοσύνολα $[z] = \{z\}$ για κάθε $z \in \mathbb{Z} \backslash \{1, 2, 3\}$.

(9) Το σύνολο $g_9 = g_1 \cup g_7 \cup \{(7, 8), (8, 7)\}$ είναι σχέση ισοδυναμίας και οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι $[1] = [2] = [3] = \{1, 2, 3\}$, $[7] = [8] = \{7, 8\}$ και τα μονοσύνολα $[z] = \{z\}$ για κάθε $z \in \mathbb{Z} \backslash \{1, 2, 3, 7, 8\}$.

(10) Το σύνολο $g_{10} = g_1 \cup g_7 \cup \{(3, 4), (4, 3)\}$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας διότι τα στοιχεία $(4, 3), (3, 1) \in g_{10}$ αλλά $(4, 1) \notin g_{10}$. ■

Άσκηση 6. *Να βρεθεί το λάθος στο ακόλουθο επιχείρημα το οποίο «δείχνει» ότι κάθε συμμετρική και μεταβατική σχέση επί ενός μη-κενού συνόλου είναι σχέση ισοδυναμίας: «Έστω $\emptyset \neq X$ ένα σύνολο και $\mathcal{R}$ μια συμμετρική και μεταβατική σχέση επί του X, δηλαδή (1) $x \sim_{\mathcal{R}} y \Longrightarrow y \sim_{\mathcal{R}} x$, και (2) $x \sim_{\mathcal{R}} y$ και $y \sim_{\mathcal{R}} z \Longrightarrow x \sim_{\mathcal{R}} z$. Επειδή η σχέση $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική και $x \sim_{\mathcal{R}} y$, έπεται ότι $y \sim_{\mathcal{R}} x$. Επειδή η σχέση $\mathcal{R}$ είναι μεταβατική, έπεται ότι $x \sim_{\mathcal{R}} x$. Άρα η σχέση $\mathcal{R}$ είναι ανακλαστική και άρα είναι σχέση ισοδυναμίας.»*

Μπορείτε να διορθώσετε το λάθος;

Λύση. Για να είναι η συμμετρική και μεταβατική σχέση $\mathcal{R}$ σχέση ισοδυναμίας, θα πρέπει να ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα, δηλαδή θα πρέπει για κάθε $x \in X$ να ισχύει ότι $x \sim_{\mathcal{R}} x$. Το λάθος στο επιχείρημα έγκειται στο ότι από τη διατύπωση του θέματος, για ένα τυχόν στοιχείο $x \in X$, δεν εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενός στοιχείο $y \in X$ έτσι ώστε $x \sim_{\mathcal{R}} y$ (και τότε να εφαρμόσουμε τη συμμετρική και ακολούθως τη μεταβατική ιδιότητα). Άρα δεν μπορύμε να εφαρμόσουμε τη συμμετρική ιδιότητα και το επιχείρημα είναι λανθασμένο. Ιδιαίτερα στην επόμενη Άσκηση 7 υπάρχει συγκεκριμένο παράδειγμα συμμετρικής και μεταβατικής σχέσης η οποία δεν είναι σχέση ισοδυναμίας.

Το λάθος μπορεί να διορθωθεί προσθέτοντας στην υπόθεση ότι η σχέση $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική και μεταβατική, την ακόλουθη συνθήκη:

- Για κάθε $x \in X$, υπάρχει $y \in X$ έτσι ώστε: $x \sim_{\mathcal{R}} y$.

Τότε για κάθε $x \in X$, θα έχουμε ότι $x \sim_{\mathcal{R}} y$ για κάποιο $y \in X$. Λόγω συμμετρικότητας θα έχουμε $y \sim_{\mathcal{R}} x$ και ακολούθως λόγω μεταβατικότητας θα έχουμε $x \sim_{\mathcal{R}} x$. Άρα ισχύειο η ανακλαστική ιδιότητα και επομένως η σχέση $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X. ■

Άσκηση 7. *Στην παρούσα Άσκηση ζητείται η εύρεση παραδειγμάτων από τα οποία να προκύπτει ότι κανένα αξίωμα στον ορισμό μιας σχέσης ισοδυναμίας δεν προκύπτει από τα άλλα δύο αξιώματα.*

(1) *Να βρεθεί σχέση επί κατάλληλου συνόλου η οποία είναι ανακλαστική και συμμετρική αλλά όχι μεταβατική.*

(2) *Να βρεθεί σχέση επί κατάλληλου συνόλου η οποία είναι συμμετρική και μεταβατική αλλά όχι ανακλαστική.*

(3) *Να βρεθεί σχέση επί κατάλληλου συνόλου η οποία είναι ανακλαστική και μεταβατική αλλά όχι συμμετρική.*

Λύση. (1) Θεωρούμε την ακόλουθη σχέση επί του συνόλου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}: \quad a \sim_{\mathcal{R}} b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \in \{0, 2, -2\}$$

Επειδή για κάθε ακέραιο $a \in \mathbb{Z}$ έχουμε $a - a = 0 \in \{0, 2, -2\}$, έπεται ότι $a \sim_{\mathcal{R}} a$ και επομένως η σχέση $\mathcal{R}$ επί του $\mathbb{Z}$ είναι ανακλαστική. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ και υποθέτουμε ότι $a \sim_{\mathcal{R}} b$, δηλαδή $a - b \in \{0, 2, -2\}$. Τότε προφανώς $b - a \in \{0, 2, -2\}$, δηλαδή $b \sim_{\mathcal{R}} a$ και επομένως η σχέση $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική. Η σχέση $\mathcal{R}$ δεν είναι μεταβατική διότι για παράδειγμα $5 \sim_{\mathcal{R}} 3$ διότι $5 - 3 = 2 \in \{0, 2, -2\}$ και $3 \sim_{\mathcal{R}} 1$ διότι $3 - 1 = 2 \in \{0, 2, -2\}$, αλλά $5 \nsim_{\mathcal{R}} 1$ διότι $5 - 1 = 4 \notin \{0, 2, -2\}$.

Επομένως η σχέση $\mathcal{R}$ επί του $\mathbb{Z}$ είναι ανακλαστική και συμμετρική αλλά όχι μεταβατική.

Ένα άλλο παράδειγμα σχέσης επί κατάλληλου συνόλου η οποπία είναι ανακλαστική και συμμετρική αλλά όχι μεταβατική είναι η σχέση g_5 της Άσκησης 5.

(2) Θεωρούμε την ακόλουθη σχέση επί του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \sim_{\mathcal{R}} b \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot b > 0$$

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι $a \sim_{\mathcal{R}} b$, δηλαδή $a \cdot b > 0$. Τότε προφανώς θα έχουμε $b \cdot a > 0$, δηλαδή $b \sim_{\mathcal{R}} a$, και επομένως η σχέση $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι $a \sim_{\mathcal{R}} b$ και $b \sim_{\mathcal{R}} c$, δηλαδή θα έχουμε $a \cdot b > 0$ και $b \cdot c > 0$. Προφανώς τότε $a \cdot c > 0$, δηλαδή $a \sim_{\mathcal{R}} c$, και επομένως η σχέση $\mathcal{R}$ είναι μεταβατική. Η σχέση $\mathcal{R}$ δεν είναι ανακλαστική διότι $0 \nsim_{\mathcal{R}} 0$.

Επομένως η σχέση $\mathcal{R}$ επί του $\mathbb{R}$ είναι συμμετρική και μεταβατική αλλά όχι ανακλαστική.

(3) Στο σύνολο $\mathbb{Z}^*$ των μη-μηδενικών ακεραίων, θεωρούμε τη σχέση διαιρετότητας:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^*: \quad a \sim_{\mathcal{R}} b \quad \Longleftrightarrow \quad a \mid b, \ \text{ δηλαδή } \ \exists\, c \in \mathbb{Z}: \ b = a \cdot c$$

Επειδή για κάθε ακέραιο a ισχύει ότι $a \mid a$, θα έχουμε $a \sim_{\mathcal{R}} a$ και επομένως η σχέση $\mathcal{R}$ επί του συνόλου $\mathbb{Z}^*$ είναι ανακλαστική. Έστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$, και υποθέτουμε ότι $a \sim_{\mathcal{R}} b$ και $b \sim_{\mathcal{R}} c$. Τότε θα έχουμε $a \mid b$ και $b \mid c$, δηλαδή υπάρχουν ακέραιοι k, l έτσι ώστε $b = a \cdot k$ και $c = b \cdot l$. Τότε $c = a \cdot k \cdot l$, δηλαδή $a \mid c$ και επομένως $a \sim_{\mathcal{R}} c$. Έτσι η σχέση $\mathcal{R}$ είναι μεταβατική. Όμως η σχέση $\mathcal{R}$ δεν είναι συμμετρική διότι για παράδειγμα αν και $2 \mid 4$, έχουμε $4 \nmid 2$.

Επομένως η σχέση $\mathcal{R}$ επί του $\mathbb{Z}^*$ είναι ανακλαστική και μεταβατική αλλά όχι συμμετρική. ■

Άσκηση 8. *Έστω X ένα μη-κενό σύνολο και $\{\mathcal{R}_i\}_{i\in I}$ μια συλλογή σχέσεων ισοδυναμίας επί του X.*

1. *Να δείξετε ότι η τομή $\mathcal{R} = \bigcap_{i\in I}\mathcal{R}_i$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X.*

2. *Να εξετάσετε αν η ένωση $\mathcal{R}^{'} = \bigcup_{i\in I}\mathcal{R}_i$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του X.*

Λύση. **1.** Έστω $x \in X$. Τότε το $(x,x) \in \mathcal{R}_i, \forall i \in I$, και άρα $(x,x) \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{R}_i$. Συνεπώς η σχέση $\mathcal{R}$ είναι ανακλαστική. Έστω $(x,y) \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{R}_i$. Τότε έχουμε

$$(x,y) \in \mathcal{R}_i, \forall i \in I \implies (y,x) \in \mathcal{R}_i, \forall i \in I \implies (y,x) \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{R}_i$$

και άρα η $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική. Έστω $(x,y) \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{R}_i$ και $(y,z) \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{R}_i$. Τότε για κάθε $i \in I$ έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l}(x,y) \in \mathcal{R}_i\\ \\ (y,z) \in \mathcal{R}_i\end{array}\right. \implies (x,z) \in \mathcal{R}_i, \forall i \in I \implies (x,z) \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{R}_i$$

δηλαδή η $\mathcal{R}$ είναι μεταβατική. Επομένως η τομή $\mathcal{R} = \bigcap_{i\in I}\mathcal{R}_i$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X.

2. Θα δείξουμε με ένα (αντι)παράδειγμα ότι γενικά η ένωση $\mathcal{R}^{'} = \bigcup_{i\in I}\mathcal{R}_i$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου X.

Αντιπαράδειγμα: Έστω $X = \{1,2,3\}$ και θεωρούμε τα παρακάτω υποσύνολα του καρτεσιανού γινομένου $X \times X$:

$$\mathcal{R}_1 = \big\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\big\} \quad \text{και} \quad \mathcal{R}_2 = \big\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\big\}$$

Τότε

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}_1 \bigcup \mathcal{R}_2 = \big\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\big\}$$

Παρατηρούμε ότι τα $(1,2),(2,3) \in \mathcal{R}'$ αλλά το $(1,3) \notin \mathcal{R}'$ και άρα η $\mathcal{R}'$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας αφού δεν ισχύει η μεταβατική ιδιότητα.

Παρατήρηση: Διαπιστώνουμε στο παραπάνω (αντι)παράδειγμα ότι η ένωση σχέσεων ισοδυναμίας $\mathcal{R}'$ είναι ανακλαστική και συμμετρική σχέση. Γενικότερα εύκολα βλέπουμε ότι η ένωση σχέσεων ισοδυναμίας επί ενός μη-κενού συνόλου ικανοποιεί την ανακλαστική και συμμετρική ιδιότητα, αλλά όπως είδαμε στο παραπάνω αντιπαράδειγμα, δεν ικανοποιεί γενικά την μεταβατική ιδιότητα, βλέπε την Άσκηση 12. ■

Άσκηση 9. *Για κάθε θετικό ακέραιο n, θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας*

$$\forall x,y \in \mathbb{Z}: \quad x \sim_{\mathcal{R}_n} y \iff n \mid x-y$$

επί του συνόλου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων. Αν n, m είναι θετικοί ακέραιοι, να περιγραφεί η σχέση ισοδυναμίας

$$\mathcal{R}_n \cap \mathcal{R}_m$$

Λύση. Σύμφωνα με την Άσκηση 8, η σχέση $\mathcal{R} := \mathcal{R}_n \cap \mathcal{R}_m$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων.

Έστω $x,y \in \mathbb{Z}$, δύο ακέραιοι και υποθέτουμε ότι $x \sim_{\mathcal{R}} y$. Τότε $(x,y) \in \mathcal{R}$ και επομένως $(x,y) \in \mathcal{R}_n$ και $(x,y) \in \mathcal{R}_m$. Με άλλα λόγια, έχουμε $x \sim_{R_n} y$ και $x \sim_{R_m} y$. Ισοδύναμα θα έχουμε $n \mid x-y$ και $m \mid x-y$. Τότε όμως θα έχουμε και $[n,m] \mid x-y$, δηλαδή $x \sim_{\mathcal{R}_{[n,m]}} y$. Άρα $(x,y) \in \mathcal{R}_{[n,m]}$ και επομένως:

$$\mathcal{R}_n \cap \mathcal{R}_m \subseteq \mathcal{R}_{[n,m]} \qquad (*)$$

Αντίστροφα, έστω $(x,y) \in \mathcal{R}_{[n,m]}$. Τότε θα έχουμε $[n,m] \mid x-y$. Επειδή $n \mid [n,m]$ και $m \mid [n,m]$, έπεται ότι $n \mid x-y$ και $m \mid x-y$. Αυτό σημαίνει ότι $x \sim_{\mathcal{R}_n} y$ και $x \sim_{\mathcal{R}_m} y$, δηλαδή $(x,y) \in \mathcal{R}_n$ και $(x,y) \in \mathcal{R}_m$. Τότε θα έχουμε $(x,y) \in \mathcal{R}_n \cap \mathcal{R}_m$ και επομένως

$$\mathcal{R}_{[n,m]} \subseteq \mathcal{R}_n \cap \mathcal{R}_m \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις (*) και (**) έπεται ότι $\mathcal{R}_n \cap \mathcal{R}_m = \mathcal{R}_{[n,m]}$. ■

Άσκηση 10. *Θεωρούμε το σύνολο* $X = \big\{1,2,3,4\big\}$.

1. *Έστω η σχέση*

$$\mathcal{R} = \big\{(1,1),(2,1),(3,1),(2,4),(4,2),(3,3),(4,1),(2,3)\big\} \quad \subseteq \quad X \times X$$

Να βρεθεί η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας $\langle \mathcal{R} \rangle$ *επί του* X *η οποία περιέχει τη σχέση* $\mathcal{R}$.

2. *Έστω η σχέση*

$$\mathcal{R} = \big\{(1,1),(2,3),(4,1)\big\} \quad \subseteq \quad X \times X$$

Να βρεθεί η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας $\langle \mathcal{R} \rangle$ *επί του* X *η οποία περιέχει τη σχέση* $\mathcal{R}$.

Λύση. **1.** Η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας $\langle \mathcal{R} \rangle$ επί του X η οποία περιέχει τη σχέση $\mathcal{R}$ θα πρέπει να περιέχει και τα ζεύγη $(1,3),(1,4),(3,2),(1,2)$. Άρα θα πρέπει να περιέχει και τα ακόλουθα:

$$\begin{cases} (2,1) \in \mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle \\ \\ (1,2) \in \mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle \end{cases} \implies (2,2) \in \langle \mathcal{R} \rangle$$

$$\begin{cases} (4,2) \in \mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle \\ \\ (2,4) \in \mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle \end{cases} \implies (4,4) \in \langle \mathcal{R} \rangle$$

$$\begin{cases} (3,1) \in \mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle \\ \\ (1,4) \in \mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle \end{cases} \implies (3,4) \in \langle \mathcal{R} \rangle \implies (4,3) \in \langle \mathcal{R} \rangle$$

Επομένως η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας $\langle \mathcal{R} \rangle$ επί του X η οποία περιέχει τη σχέση $\mathcal{R}$ θα πρέπει να περιέχει όλα τα διατεταγμένα ζεύγη στοιχείων του X. Άρα

$$\langle \mathcal{R} \rangle = X \times X$$

2. Όμοια όπως παραπάνω βρίσκουμε ότι η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας $\langle \mathcal{R} \rangle$ επί του X η οποία περιέχει τη σχέση $\mathcal{R}$ είναι

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \big\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)\big\} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 11. *Να περιγραφούν όλες οι πιθανές σχέσεις ισοδυναμίας επί ενός συνόλου* X *με πλήθος στοιχείων* $|X| = 1$, $|X| = 2$, $|X| = 3$, *και* $|X| = 4$.

Λύση. Υπενθυμιζουμε ότι υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των σχέσεων ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ επί ενός συνόλου X και των διαμερίσεων Δ επί του X:

$$\mathcal{R} \subseteq X \times X \quad \longmapsto \quad \Delta_{\mathcal{R}} = X/\mathcal{R} = \big\{[x]_{\mathcal{R}} \subseteq X \mid x \in \mathcal{X}\big\}$$

$$\Delta = \big\{A_i \subseteq X \mid i \in I\big\} \quad \longmapsto \quad \mathcal{R}_{\Delta} = \big\{(x,y) \in X \times X \mid \exists i \in I : x,y \in A_i\big\}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω αντιστοιχία για να περιγράψουμε τις ζητούμενες σχέσεις ισοδυναμίας.

- Έστω $X = \{a\}$. Τότε $X \times X = \{(a,a)\}$ και άρα έχουμε μόνο μια σχέση ισοδυναμίας την $\mathcal{R} = X \times X$.

- Έστω $X = \{a,b\}$. Τότε $X \times X = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$. Για να βρούμε όλες τις σχέσεις ισοδυναμίας του X αρκεί να βρούμε όλες τις διαμερίσεις του. Στη περίπτωση αυτή έχουμε τη διαμέριση $\Delta_1 = \{a,b\} = X$ και άρα την σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_1 = X \times X$, και τη διαμέριση $\Delta_2 = \{\{a\},\{b\}\}$ όπου η σχέση ισοδυναμίας είναι $\mathcal{R}_2 = \{(a,a),(b,b)\}$.

- Έστω $X = \{a, b, c\}$. Τότε οι διαμερίσεις του συνόλου X και οι αντίστοιχες σχέσεις ισοδυναμίας είναι

$$\begin{aligned}
\Delta_1 = \big\{a, b, c\big\} = X \times X \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{R}_1 = X \times X \\
\Delta_2 = \big\{\{a, b\}, \{c\}\big\} \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{R}_2 = \big\{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b), (c, c)\big\} \\
\Delta_3 = \big\{\{a, c\}, \{b\}\big\} \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{R}_3 = \big\{(a, c), (c, a), (a, a), (c, c), (b, b)\big\} \\
\Delta_4 = \big\{\{b, c\}, \{a\}\big\} \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{R}_4 = \big\{(b, c), (c, b), (b, b), (c, c), (a, a)\big\} \\
\Delta_5 = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\big\} \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{R}_5 = \big\{(a, a), (b, b), (c, c)\big\}
\end{aligned}$$

- Έστω $X = \{a, b, c, d\}$. Τότε οι διαμερίσεις του συνόλου X είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{array}{rrr}
\Delta_1 = \big\{a, b, c, d\big\} = X \times X & \Delta_2 = \big\{\{a, b, c\}, d\big\} & \Delta_3 = \big\{\{b, c, d\}, \{a\}\big\} \\
\Delta_4 = \big\{\{a, c, d\}, \{b\}\big\} & \Delta_5 = \big\{\{a, b, d\}, \{c\}\big\} & \Delta_6 = \big\{\{a, b\}, \{c, d\}\big\} \\
\Delta_7 = \big\{\{a, c\}, \{b, d\}\big\} & \Delta_8 = \big\{\{a, d\}, \{b, c\}\big\} & \Delta_9 = \big\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\big\} \\
\Delta_{10} = \big\{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\big\} & \Delta_{11} = \big\{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\big\} & \Delta_{12} = \big\{\{b, c\}, \{a\}, \{d\}\big\} \\
\Delta_{13} = \big\{\{b, d\}, \{a\}, \{c\}\big\} & \Delta_{14} = \big\{\{c, d\}, \{a\}, \{b\}\big\} & \Delta_{15} = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\big\}
\end{array}$$

Επομένως προκύπτουν 15 σχέσεις ισοδυναμίας $\mathcal{R}_{\Delta_i}$, $1 \leq i \leq 15$, επί του συνόλου X, η περιγραφή των οποίων αφήνεται ως άσκηση.

Για παράδειγμα η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_{\Delta_9}$ η οποία αντιστοιχεί στην διαμέριση Δ_9 αποτελείται από τα εξής στοιχεία του συνόλου $X \times X$:

$$\mathcal{R}_{\Delta_9} = \big\{(a, a),\ (b, b),\ (c, c),\ (d, d),\ (a, b),\ (b, a)\big\} \qquad \blacksquare$$

Άσκηση 12. *Έστω $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ δύο σχέσεις επί ενός συνόλου X.*

1. *Αν οι σχέσεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ είναι ανακλαστικές, να δειχθεί ότι η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ είναι ανακλαστική.*
2. *Αν οι σχέσεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ είναι συμμετρικές, να δειχθεί ότι η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ είναι συμμετρική.*
3. *Αν οι σχέσεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ είναι μεταβατικές, να δειχθεί ότι η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ δεν είναι απαραίτητα μεταβατική.*

Λύση.

1. Υποθέτουμε ότι οι σχέσεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ είναι ανακλαστικές. Για κάθε $a \in X$, θα έχουμε ότι $(a, a) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ (και παρόμοια $(a, a) \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$). Επομένως έπεται ότι $(a, a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ είναι ανακλαστική.
2. Υποθέτουμε ότι οι σχέσεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ είναι συμμετρικές. Έστω $a, b \in X$ και υποθέτουμε ότι $(a, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. Αν $(a, b) \in \mathcal{R}$, τότε λόγω συμμετρικότητας της $\mathcal{R}$ θα έχουμε ότι $(b, a) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. Αν $(a, b) \in \mathcal{S}$, τότε λόγω συμμετρικότητας της $\mathcal{S}$ θα έχουμε ότι $(b, a) \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. Έτσι σε κάθε περίπτωση $(a, b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. Επομένως η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ είναι συμμετρική.
3. Θεωρούμε τις ακόλουθες σχέσεις απί του συνόλου $X = \big\{1, 2, 3\big\}$:
$$\mathcal{R} = \big\{(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 3),\ (1, 2),\ (2, 1)\big\} \quad \text{και} \quad \mathcal{S} = \big\{(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 3),\ (2, 3),\ (3, 2)\big\}$$
οι οποίες εύκολα βλέπουμε ότι είναι μεταβατικές (και επίσης ανακλαστικές και συμμετρικές). Για τη σχέση
$$\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \big\{(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 3),\ (1, 2),\ (2, 1),\ (2, 3),\ (3, 2)\big\}$$
βλέπουμε ότι αν και $(1, 2) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ και $(2, 3) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, έχουμε ότι $(1, 3) \notin \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. Επομένως η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ δεν είναι μεταβατική. $\blacksquare$

Από την Άσκηση 12 προκύπτει ότι η ένωση σχέσεων ισοδυναμίας δεν είναι απαραίτητα σχέση ισοδυναμίας. Η επόμενη Άσκηση δίνει αναγκαίες και ικανές συνθήκες έτσι ώστε η ένωση σχέσεων ισοδυναμίας να είναι σχέση ισοδυναμίας.

Άσκηση 13. *Έστω $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ δύο σχέσεις ισοδυναμίας επί ενός συνόλου X. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του X.*

2. $\forall a \in X$: *είτε* $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{S}}$ *είτε* $[a]_{\mathcal{S}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$.

Λύση. $\mathbf{1.} \Longrightarrow \mathbf{2.}$ Υποθέτουμε ότι η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του X. Έστω $a \in X$ ένα τυχόν στοιχείο του X. Υποθέτουμε ότι $[a]_{\mathcal{R}} \nsubseteq [a]_{\mathcal{S}}$ και θα δείξουμε ότι αναγκαστικά θα έχουμε ότι $[a]_{\mathcal{S}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$.

Επειδή $[a]_{\mathcal{R}} \nsubseteq [a]_{\mathcal{S}}$, έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ τέτοιο ώστε $[b] \notin [a]_{\mathcal{S}}$. Επομένως θα έχουμε $a \sim_{\mathcal{R}} b$ και $a \nsim_{\mathcal{S}} b$ ή ισοδύναμα $(a, b) \in \mathcal{R}$ και $(a, b) \notin \mathcal{S}$. Επειδή η σχέση $\mathcal{R}$ είναι συμμετρική έπεται ότι $(b, a) \in \mathcal{R}$. Έστω $c \in [a]_{\mathcal{S}}$ και τότε θα έχουμε ότι $a \sim_{\mathcal{S}} c$ ή ισοδύναμα $(a, c) \in \mathcal{S}$. Επειδή $(b, a) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ και $(a, c) \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, και επειδή υποθέσαμε ότι η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ είναι σχέση ισοδυναμίας, ιδιαίτερα ισχύει η μεταβατική ιδιότητα για την $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, έπεται ότι $(b, c) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. Τότε είτε $(b, c) \in \mathcal{R}$ είτε $(b, c) \in \mathcal{S}$.

- Αν $(b, c) \in \mathcal{R}$, ισοδύναμα $(c, b) \in \mathcal{R}$ διότι η σχέση $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας, τότε επειδή $(b, a) \in \mathcal{R}$, λόγω της μεταβατικότητας της $\mathcal{R}$ θα έχουμε $(c, a) \in \mathcal{R}$ και επομένως $c \sim_{\mathcal{R}} a$. Αυτό σημαίνει ότι $c \in [a]_{\mathcal{R}}$. Επομένως κάθε στοιχείο c της κλάσης ισοδυναμίας $[a]_{\mathcal{S}}$ είναι και στοιχείο της κλάσης ισοδυναμίας $[a]_{\mathcal{R}}$. Άρα $[a]_{\mathcal{S}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$.
- Αν $(b, c) \in \mathcal{S}$, τότε επειδή $(a, c) \in \mathcal{S}$ ή ισοδύναμα $(c, a) \in \mathcal{S}$, και η σχέση $\mathcal{S}$ είναι σχέση ισοδυναμίας, θα έχουμε $(b, a) \in \mathcal{S}$. Ισοδύναμα θα έχουμε $b \sim_{\mathcal{S}} a$ δηλαδή $b \in [a]_{\mathcal{S}}$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι έχουμε υποθέσει ότι $b \notin [a]_{\mathcal{S}}$.

Επομένως καταλήγουμε σε κάθε περίπτωση ότι αν $[a]_{\mathcal{R}} \nsubseteq [a]_{\mathcal{S}}$, τότε $[a]_{\mathcal{S}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$. Ακριβώς ανάλογα δείχνουμε ότι αν $[a]_{\mathcal{S}} \nsubseteq [a]_{\mathcal{R}}$, τότε $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{S}}$.

$\mathbf{2.} \Longrightarrow \mathbf{1.}$ Υποθέτουμε ότι $\forall a \in X$: είτε $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{S}}$ είτε $[a]_{\mathcal{S}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$. Θα δείξουμε ότι η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του X.

Από την Άσκηση 12 έπεται ότι η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ είναι ανακλαστική και συμμετρική. Έτσι μένει να δείξουμε ότι η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ είναι μεταβατική.

Έστω $(a, b), (b, c) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. Έχουμε τότε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

- $(a, b), (b, c) \in \mathcal{R}$. Τότε επειδή η $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας θα έχουμε $(a, c) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.
- $(a, b), (b, c) \in \mathcal{S}$. Τότε επειδή η $\mathcal{S}$ είναι σχέση ισοδυναμίας θα έχουμε $(a, c) \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.
- $(a, b) \in \mathcal{R}$ και $(b, c) \in \mathcal{S}$. Ισοδύναμα θα έχουμε $a \sim_{\mathcal{R}} b$ και $b \sim_{\mathcal{S}} c$, και επομένως $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$ και $[b]_{\mathcal{S}} = [c]_{\mathcal{S}}$. Από την υπόθεση θα έχουμε ότι είτε $[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{S}}$ είτε $[b]_{\mathcal{S}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$.
  - Αν $[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{S}}$, τότε $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{S}}$ και επομένως θα έχουμε $a \in [a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{S}}$. Έτσι θα έχουμε $a \sim_{\mathcal{S}} b$, δηλαδή $(a, b) \in \mathcal{S}$, και επειδή $(b, c) \in \mathcal{S}$, λόγω της μεταβατικότητας της $\mathcal{S}$ έπεται ότι $(a, c) \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.
  - Αν $[b]_{\mathcal{S}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$, τότε $[c]_{\mathcal{S}} = [b]_{\mathcal{S}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$ και επομένως θα έχουμε $c \in [c]_{\mathcal{S}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$. Έτσι θα έχουμε $c \sim_{\mathcal{R}} b$ ή ισοδύναμα $b \sim_{\mathcal{R}} c$. Αυτό σημαίνει ότι $(b, c) \in \mathcal{R}$. Επειδή $(a, b) \in \mathcal{R}$, λόγω μεταβατικότητας της σχέσης $\mathcal{R}$, θα έχουμε $(a, c) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.
- $(a, b) \in \mathcal{S}$ και $(b, c) \in \mathcal{R}$. Εργαζόμενοι ακριβώς όπως παραπάνω, βλέπουμε ότι $(a, c) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $(a, c) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$. Άρα η σχέση $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ είναι μεταβατική και επομένως είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X. ■

Άσκηση 14. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και υποθέτουμε ότι*

$$\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{n} \quad \textit{και} \quad \mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^{m}$$

είναι διαμερίσεις του X. Να δειχθεί ότι η συλλογή υποσυνόλων

$$\mathcal{C} = \{A_i \cap B_j\}_{i,j=1}^{n,m}$$

είναι μια διαμέριση του X.

Λύση. [2] Θεωρούμε τις σχέσεις ισοδυναμίας $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ και $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ οι οποίες επάγονται επί του X από τις διαμερίσεις $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ αντίστοιχα. Υπενθυμίζουμε ότι, $\forall x, y \in X$:

$$x \sim_{\mathcal{R}_{\mathcal{A}}} y \iff \exists i = 1, 2, \cdots, n : \ x, y \in A_i$$

$$x \sim_{\mathcal{R}_{\mathcal{B}}} y \iff \exists j = 1, 2, \cdots, m : \ x, y \in B_j$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 8, η σχέση $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X. Θα προσδιορίσουμε τη διαμέριση $\Delta_{\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{B}}}$ η οποία αντιστοιχεί στη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\Delta_{\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{B}}} = X/\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{B}} = \big\{ [x]_{\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{B}}} \subseteq X \mid x \in X \big\}$$

Για κάθε $x \in X$, θα έχουμε:

$$[x]_{\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{B}}} = \big\{ y \in X \mid y \sim_{\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{B}}} x \big\} = \big\{ y \in X \mid (x,y) \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \big\} = \big\{ y \in X \mid (x,y) \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \text{ και } (x,y) \in \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \big\} =$$

$$= \big\{ y \in X \mid \exists i = 1, 2, \cdots, n : \ x, y \in A_i \ \text{ και } \ \exists j = 1, 2, \cdots, m : \ x, y \in B_j \big\} = A_i \cap B_j$$

όπου i είναι ο μοναδικός δείκτης $1 \leq i \leq n$ έτσι ώστε $x \in A_i$ και j είναι ο μοναδικός δείκτης $1 \leq j \leq m$ έτσι ώστε $x \in B_j$. Τέτοιοι δείκτες υπάρχουν και είναι μοναδικοί διότι τα υποσύνολα A_i και B_j είναι υποσύνολα τα οποία ανήκουν σε διαμερίσεις του X. Άρα

$$\Delta_{\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{B}}} = \big\{ A_i \cap B_j \big\}_{i,j=1}^{n,m} = \mathcal{C}$$

και επομένως, επειδή το σύνολο πηλίκο μιας σχέσης ισοδυναμίας επί ενός συνόλου αποτελεί διαμέριση του συνόλου, έπεται ότι η συλλογή υποσυνόλων $\mathcal{C}$ είναι μια διαμέριση του X. ■

Άσκηση 15. **1.** *Στο σύνολο $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, όπου $\mathbb{N}_0 = \big\{0, 1, 2, 3, \cdots\big\}$, ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R}$ ως εξής:*

$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : \qquad (a,b) \sim_{\mathcal{R}} (c,d) \iff a + d = b + c$$

Δείξτε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ και ακολούθως περιγράψτε το σύνολο πηλίκο $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/\mathcal{R}$.

2. *Στο σύνολο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, όπου $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{S}$ ως εξής:*

$$\forall (x,y), \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : \ \ (x,y) \sim_{\mathcal{S}} (a,b) \iff xb = ya$$

Δείξτε ότι η $\mathcal{S}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ και ακολούθως περιγράψτε το σύνολο πηλίκο $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\mathcal{S}$.

Λύση. **1.** Για κάθε $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ έχουμε:

- Ανακλαστική ιδιότητα: Επειδή $a + b = b + a$ έπεται ότι $(a,b) \sim (a,b)$.

- Συμμετρική ιδιότητα: Αν $(a,b) \sim (c,d)$ τότε

$$a + d = b + c \implies c + b = d + a \implies (c,d) \sim (a,b)$$

- Μεταβατική ιδιότητα: Αν $(a,b) \sim (c,d)$ και $(c,d) \sim (e,f)$ τότε έχουμε

$$\begin{cases} a + d = b + c \\ \\ c + f = d + e \end{cases} \implies a + d + f = b + c + f = b + d + e \implies a + d + f = b + d + e$$

$$\implies (a,b) \sim (e,f)$$

Άρα η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

[2] Ότι η συλλογή $\mathcal{C}$ είναι μια διαμέριση του X μπορεί να δειχθεί άμεσα αποδεικνύοντας τις τρεις ιδιότητες της διαμέρισης. Εδώ θα δείξουμε ότι η συλλογή $\mathcal{C}$ συμπίπτει με το σύνολο πηλίκο $X/\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ του X ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, όπου $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ και $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ είναι οι σχέσεις ισοδυναμίας οι οποίες επάγονται επί του X από τις διαμερίσεις $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ αντίστοιχα, και ακολούθως θα χρησιμοποιήσουμε ότι το σύνολο πηλίκο μιας σχέσης ισοδυναμίας επί ενός συνόλου αποτελεί διαμέριση του συνόλου.

Έστω $(a, b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Τότε η κλάση ισοδυναμίας του (a, b) ως προς τη σχέση $\mathcal{R}$ είναι το ακόλουθο σύνολο:

$$\begin{aligned} [(a,b)]_{\mathcal{R}} &= \big\{(c,d) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid (a,b) \sim (c,d)\big\} \\ &= \big\{(c,d) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid a+d = b+c\big\} \\ &= \big\{(c,d) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid a-b = c-d\big\} \end{aligned}$$

Για να περιγράψουμε το σύνολο πηλίκο του $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ως προς την $\mathcal{R}$ ορίζουμε τη παρακάτω αντιστοιχία:

$$f : (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{Z}, \ [(a,b)]_{\mathcal{R}} \longmapsto f([(a,b)]_{\mathcal{R}}) = a-b$$

και θα δείξουμε ότι η f είναι μια καλά ορισμένη, «1-1» και «επί» απεικόνιση.

– <u>Καλά ορισμένη</u>: Έστω $[(a,b)]_{\mathcal{R}} = [(c,d)]_{\mathcal{R}}$. Τότε

$$(a,b) \sim_{\mathcal{R}} (c,d) \implies a+d = b+c \implies a-b = c-d \implies f([(a,b)]_{\mathcal{R}}) = f([(c,d)]_{\mathcal{R}})$$

και άρα η f είναι καλά ορισμένη.

– <u>Ένα προς ένα</u>: Έστω $f([(a,b)]_{\mathcal{R}}) = f([(c,d)]_{\mathcal{R}})$. Τότε

$$a-b = c-d \implies a+d = b+c \implies (a,b) \sim (c,d) \implies [(a,b)]_{\mathcal{R}} = [(c,d)]_{\mathcal{R}}$$

Συνεπώς η f είναι ένα προς ένα.

– <u>Επί</u>: Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Αν $k \geq 0$ τότε $f([(k,0)]_{\mathcal{R}}) = k - 0 = k$ ενώ αν $k < 0$ τότε $f([(0,-k)]_{\mathcal{R}}) = 0 - (-k) = k$. Άρα η f είναι επί.

Επομένως το σύνολο πηλίκο $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/\mathcal{R}$ είναι σε «1-1» και «επί» αντιστοιχία με το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών.

2. Για κάθε $(x,y), (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ έχουμε:

- <u>Ανακλαστική ιδιότητα</u>: Επειδή $x \cdot y = y \cdot x$ έπεται ότι $(x,y) \sim (x,y)$.

- <u>Συμμετρική ιδιότητα</u>: Αν $(x,y) \sim (a,b)$ τότε

$$x \cdot b = y \cdot a \implies a \cdot y = b \cdot x \implies (a,b) \sim (x,y)$$

- <u>Μεταβατική ιδιότητα</u>: Έστω $(x,y) \sim (a,b)$ και $(a,b) \sim (c,d)$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x \cdot b = y \cdot a \\ \\ a \cdot d = b \cdot c \end{array} \right. &\implies x \cdot b \cdot d = y \cdot a \cdot d = y \cdot b \cdot c \implies (x \cdot d) \cdot b = (y \cdot c) \cdot b \\ &\implies x \cdot d = y \cdot c \quad \text{διότι} \quad b \neq 0 \\ &\implies (x,y) \sim (c,d) \end{aligned}$$

Άρα η $\mathcal{S}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Για να περιγράψουμε το σύνολο πηλίκο του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ ως προς την $\mathcal{S}$ ορίζουμε τη παρακάτω αντιστοιχία:

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad [(x,y)]_{\mathcal{S}} \longmapsto f([(x,y)]_{\mathcal{S}}) = \frac{x}{y}$$

και θα δείξουμε ότι είναι μια καλά ορισμένη, «1-1» και «επί» απεικόνιση.

– <u>Καλά ορισμένη</u>: Έστω $[(x,y)]_{\mathcal{S}} = [(a,b)]_{\mathcal{S}}$. Τότε

$$(x,y) \sim_{\mathcal{S}} (a,b) \implies x \cdot b = y \cdot a \implies \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \implies f([(x,y)]_{\mathcal{S}}) = f([(a,b)]_{\mathcal{S}})$$

και άρα η f είναι καλά ορισμένη.

– Ένα προς ένα: Έστω $f([(x,y)]_{\mathcal{S}}) = f([(a,b)]_{\mathcal{S}})$. Τότε

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \implies x \cdot b = a \cdot y \implies (x,y) \sim (a,b) \implies [(x,y)]_{\mathcal{S}} = [(a,b)]_{\mathcal{S}}$$

Συνεπώς η f είναι «1-1».

– Επί: Έστω $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Έτσι $p, q \in \mathbb{Z}$ με $q \neq 0$ και τότε $f([(p,q)]_{\mathcal{S}}) = \frac{p}{q}$. Άρα η f είναι «επί».

Επομένως το σύνολο πηλίκο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\mathcal{S}$ είναι σε «1-1» και «επί» αντιστοιχία με το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$. ■

Σχόλιο. *Στην προηγούμενη Άσκηση εργασθήκαμε με το σύνολο $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ και ορίσαμε μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ επί του $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε τα σύνολα $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/\mathcal{R}$ και $\mathbb{Z}$ να συνδέονται μέσω μιας «1-1» και «επί» απεικόνισης.*

Μπορεύμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμέρασμα αν εργασθούμε με την ίδια σχέση $\mathcal{R}$ στο σύνολο $\mathbb{N}$;

Άσκηση 16. *Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})$ των ακολουθιών Cauchy ρητών αριθμών*[3]*. Στο σύνολο $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})$ ορίζουμε τη σχέση $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{CS}(\mathbb{Q}) \times \mathcal{CS}(\mathbb{Q})$ ως εξής:*

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{\mathcal{R}} (r'_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \text{η ακολουθία } (r_n - r'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ είναι μηδενική: } \varinjlim(r_n - r'_n) = 0$$

(1) *Να δειχθεί ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί τού $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})$.*
(2) *Να περιγραφεί το σύνολο πηλίκο $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})/\mathcal{R}$.*

Λύση. (1) Δείχνουμε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})$.

(α΄) Για κάθε $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{CS}(\mathbb{Q})$, ισχύει ότι $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{\mathcal{R}} (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, αφού όλοι οι όροι τής ακολουθίας $(r_n - r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ίσοι με μηδέν και ως εκ τούτου η $(r_n - r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια μηδενική ακολουθία. Ώστε η σχέση $\mathcal{R}$ διαθέτει την ανακλαστική ιδιότητα.

(β΄) Αν $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim \mathcal{R}(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε η ακολουθία $(r_n - r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια μηδενική ακολουθία και γι΄ αυτό και η ακολουθία $-(r_n - r'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (r'_n - r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης μια μηδενική ακολουθία. Επομένως, $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{\mathcal{R}} (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ώστε η σχέση $\mathcal{R}$ διαθέτει την συμμετρική ιδιότητα.

(γ΄) Αν $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{\mathcal{R}} (r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{\mathcal{R}} (r''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε οι ακολουθίες $(r_n - r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(r'_n - r''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενικές ακολουθίες. Αλλά όπως γνωρίζουμε και το άθροισμά τους, δηλαδή η ακολουθία $(r_n - r'_n)_{n\in\mathbb{N}} + (r'_n - r''_n)_{n\in\mathbb{N}} = (r_n - r''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης μια μηδενική ακολουθία και γι΄ αυτό θα έχουμε $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{\mathcal{R}} (r''_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ώστε η σχέση $\mathcal{R}$ διαθέτει τη μεταβατική ιδιότητα.

(2) Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό ότι κάθε ακολουθία Cauchy ρητών αριθμών $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και άρα θα έχουμε $\varinjlim r_n \in \mathbb{R}$. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε μια αντιστοιχία

$$\Phi \colon \mathcal{CS}(\mathbb{Q})/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi\big([(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]\big) = \varinjlim r_n$$

(α΄) *Η Φ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση*: Έστω $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες Cauchy ρητών αριθμών και υποθέτουμε ότι οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ και $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ είναι ίσες (ως στοιχεία του συνόλου πηλίκο $\mathcal{CF}/\mathcal{R}$). Τότε όπως γνωρίζουμε, θα έχουμε

$$[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}] \implies (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{\mathcal{R}} (r'_n)_{n\in\mathbb{N}} \implies \varinjlim(r_n - r'_n) = 0$$

Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες ορίων, η τελευταία σχέση δίνει ότι $\varinjlim r_n = \varinjlim r'_n$. Αυτό όμως σημαίνει $\Phi\big([(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]\big) = \Phi\big(\big([(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}]\big)$ και άρα η Φ είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση.

[3]Υπενθυμίζουμε ότι μια ακολουθία $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ρητών αριθμών καλείται **ακολουθία Cauchy** αν:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q},\ \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall m, n \geq n_0 \implies |r_n - r_m| < \epsilon$$

(β′) <u>Η Φ είναι 1-1</u>: Έστω $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες Cauchy ρητών αριθμών και υποθέτουμε ότι $\Phi\big([(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]\big) = \Phi\big((r'_n)_{n\in\mathbb{N}}]\big)$. Τότε $\varinjlim r_n = \varinjlim r'_n$ και επομένως η ακολουθία $(r_n - r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική: $\varinjlim(r_n - r'_n) = 0$. Τότε όμως θα έχουμε $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{\mathcal{R}} (r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και επομένως $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim_{\mathcal{R}}][(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Αυτό σημαίνει ότι η Φ είναι «1-1».

(γ′) <u>Η Φ είναι επί</u>: Έστω $r \in \mathbb{R}$ ένας πραγματικός αριθμό. Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι ο r είναι όριο μιας ακολουθίας Cauchy: $r = \varinjlim r_n$, όπου $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία Cauchy ρητών αριθμών. Τότε $\Phi\big([(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]\big) = r$ και επομένως η απεικόνιση Φ είναι «επί».

Επομένως το σύνολο πηλίκο $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})/\mathcal{R}$ είναι σε «1-1» και «επί» αντιστοιχία με το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. ■

Άσκηση 17. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), και έστω $H(t)$ ένα τυχόν πολυώνυμο υπεράνω του $\mathbb{K}$. Στο σύνολο των πολυωνύμων $\mathbb{K}[t]$, ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R}$ ως εξής:*

$$\forall\, P(t), Q(t) \in \mathbb{K}[t]: \quad P(t) \sim_{\mathcal{R}} Q(t) \quad \Longleftrightarrow \quad H(t) \mid P(t) - Q(t)$$

(1) *Να δείξετε ότι η σχέση $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{K}[t]$.*
(2) *Να εξετασθεί αν η σχέση $\mathcal{R}$ είναι συμβιβαστή με τις πράξης πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πολυωνύμων.*
(3) *Αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ και $H(t) = t^2 + 1$, ποιό είναι το σύνολο πηλίκο $\mathbb{R}[t]/\mathcal{R}$;*

Λύση. (1) Δείχνουμε ότι η σχέση $\sim_{\mathcal{R}}$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{R}[t]$.

(α′) Προφανώς για κάθε πολυώνυμο $P(t)$ ισχύει $P(t) \sim_{\mathcal{R}} P(t)$ διότι $H(t) \mid P(t) - P(t)$.

(β′) Έστω ότι για τα πολυώνυμα $P(t)$ και $Q(t)$ ισχύει ότι $P(t) \sim_{\mathcal{R}} Q(t)$, δηλαδή $H(t) \mid P(t) - Q(t)$. Τότε προφανώς $H(t) \mid Q(t) - P(t)$ και άρα $Q(t) \sim_{\mathcal{R}} P(t)$.

(γ′) Έστω ότι για τα πολυώνυμα $P(t)$, $Q(t)$ και $R(t)$ ισχύει ότι $P(t) \sim_{\mathcal{R}} Q(t)$ και $Q(t) \sim_{\mathcal{R}} R(t)$, δηλαδή $H(t) \mid P(t) - Q(t)$ και $H(t) \mid Q(t) - R(t)$. Τότε προφανώς θα έχουμε $H(t) \mid [P(t) - Q(t) + Q(t) - R(t)]$, δηλαδή $H(t) \mid P(t) - R(t)$ και επομένως $P(t) \sim_{\mathcal{R}} R(t)$.

(2) Έστω $P(t), Q(t), R(t), S(t)$ πολυώνυμα και υποθέτουμε ότι:

$$P(t) \sim_{\mathcal{R}} Q(t) \quad \& \quad R(t) \sim_{\mathcal{R}} S(t) \quad \text{και άρα} \quad H(t) \mid P(t) - Q(t) \quad \& \quad H(t) \mid R(t) - S(t)$$

Τότε υπάρχουν πολυώντυμα $F(t)$ και $G(t)$ έτσι ώστε:

$$P(t) - Q(t) = F(t) \cdot H(t) \quad \& \quad R(t) - S(t) = G(t) \cdot H(t) \tag{†}$$

Τότε θα έχουμε

$$(P(t)+R(t))-(Q(t)+S(t)) = P(t)-Q(t)+R(t)-S(t) = F(t)\cdot H(t)+G(t)\cdot H(t) = (F(t)+G(t))\cdot H(t)$$

δηλαδή $H(t) \mid (P(t) + R(t)) - (Q(t) + S(t))$ και επομένως $P(t) + R(t) \sim_{\mathcal{R}} Q(t) + S(t)$, δηλαδή η πράξη της πρόσθεσης πολυωνύμων είναι συμβιβαστή με την σχέση ισοδυναμίας «$\sim_{\mathcal{R}}$».

Παρόμοια από τις σχέσεις (†) θα έχουμε:

$$P(t)R(t) - Q(t)R(t) = F(t)R(t)H(t) \quad \& \quad R(t)Q(t) - S(t)Q(t) = G(t)Q(t)H(t)$$

και άρα

$$P(t)R(t) - Q(t)S(t) = \big(F(t)R(t) + G(t)Q(t)\big)H(t) \implies H(t) \mid \big(P(t)R(t) - Q(t)S(t)\big) \implies$$
$$\implies P(t)R(t) \sim_{\mathcal{R}} Q(t)S(t)$$

Δηλαδή η πράξη του πολλαπλασιασμού πολυωνύμων είναι συμβιβαστή με την σχέση ισοδυναμίας «$\sim_{\mathcal{R}}$».

(3) Έστω $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ τυχόν πολυώνυμο. Από την Ευκλείδεια διαίρεση πολυωνύμων, θα έχουμε:

$$P(t) = P'(t)(t^2 + 1) + R(t), \quad \text{όπου} \quad R(t) = 0 \quad \text{ή} \quad \deg R(t) < 2$$

Επομένως το υπόλοιπο $R(t)$ θα είναι ένα πολυώνυμο της μορφής

$$R(t) = a + bt, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Έτσι από την παραπάνω σχέση θα έχουμε

$$P(t) - (a + bt) = P'(t)(t^2 + 1) \implies t^2 + 1 \,||\, P(t) - (a + bt) \implies P(t) \sim_{\mathcal{R}} (a + bt) \implies$$

$$\forall P(t) \in \mathbb{R}[t]: \quad [P(t)]_{\mathcal{R}} = [a+bt]_{\mathcal{R}}$$

όπου $a + bt$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνυμου $P(t)$ με το πολυώνυμο $t^2 + 1$, και επομένως το σύνολο πηλίκο έχει ισοδύναμα την ακόλουθη περιγραφή

$$\mathbb{R}[t]/\mathcal{R} = \big\{[a+bt]_{\mathcal{R}} \subseteq \mathbb{R}[t] \mid a, b \in \mathbb{R}\big\}$$

Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε μια απεικόνιση

$$\Phi\colon \mathbb{R}[t]/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \Phi([P(t)]_{\mathcal{R}}) = \Phi([a+bt]_{\mathcal{R}}) = a+bi$$

(α΄) <u>*Η απεικόνιση Φ είναι καλά ορισμένη*</u>: Έστω $[a+bt]_{\mathcal{R}} = [a'+b't]_{\mathcal{R}}$. Τότε ως γνωστόν, θα έχουμε $a+bt \sim_{\mathcal{R}} a'+b't$, κα άρα $(a+bt)-(a'+b't) = F(t)(t^2+1)$, για κάποιο ππολυώνυμο $F(t) \in \mathbb{R}[t]$. Τότε υπολογίζοντας ρτην παραπάνω σχέση στην φανταστική μονάδα, θα έχουμε: $(a+bi)-(a'+b'i) = F(i)(i^2+1) = 0$ και επομένως $(a+bi) = (a'+b'i)$. Αυτό σημαίνει ότι $\Phi([a+bt]_{\mathcal{R}}) = \Phi([a'+b't]_{\mathcal{R}})$, και άρα η Φ είναι καλά ορισμένη.

(β΄) <u>*Η απεικόνιση Φ είναι «1-1»*</u>: Έστω $\Phi([a+bt]_{\mathcal{R}}) = \Phi([a'+b't]_{\mathcal{R}})$, και επομένως $a+bi = a'+b'i$. Τότε όμως θα έχουμε $a = a'$ και $b = b'$ και επομένως $[a+bt]_{\mathcal{R}} = [a'+b't]_{\mathcal{R}}$. Άρα η απεικόνιση Φ είναι «1-1».

(γ΄) <u>*Η απεικόνιση Φ είναι «επί»*</u>: Αν $z = a+bi \in \mathbb{C}$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, θεωρούμε το πολυώνυμο $P(t) = a+bt$. Τότε

$$\Phi([P(t)]_{\mathcal{R}}) = P(i) = a+bi$$

και άρα η απεικόνιση Φ είναι «επί».

Επομένως η απεικόνιση Φ είναι «1-1» και «επί». ■

Σχόλιο. *Ας δούμε πως λειτουργεί η απεικόνιση Φ της Άσκησης 17, σε μια ειδική αλλά χαρακτηριστική περίπτωση.*

Θεωρούμε το πολυώνυμο t^2. Τότε σύμφωνα με την απόδειξη της Άσκησης 17, για να υπολογίσουμε την τιμή $\Phi([t^2]_{\mathcal{R}})$, εκτελούμε την Ευκλείδεια Διαίρεση του πολυωνύμου t^2 με το πολυώνυμο t^2+1:

$$t^2 = 1(t^2+1) - 1$$

και τότε γνωρίζουμε ότι

$$[t]^2_{\mathcal{R}} = [t]_{\mathcal{R}} \cdot [t]_{\mathcal{R}} = [t^2]_{\mathcal{R}} = [-1]_{\mathcal{R}}$$

Άρα $\Phi([t^2]_{\mathcal{R}}) = -1$.

Από την άλλη πλευρά, επειδή η πράξη «$\cdot$» πολλαπλασιασμού πολυωνύμων είναι συμβιβαστή με την σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$, θα έχουμε τον ακόλουθο καλά ορισμένο πολλαπλασιασμό στο σύνολο πηλίκο

$$[P(t)]_{\mathcal{R}} \cdot [Q(t)]_{\mathcal{R}} = [P(t) \cdot Q(t)]_{\mathcal{R}}$$

Ιδιαίτερα θα έχουμε $[t]_{\mathcal{R}} \cdot [t]_{\mathcal{R}} = [t^2]_{\mathcal{R}}$, και άρα:

$$\Phi([t]_{\mathcal{R}} \cdot [t]_{\mathcal{R}}) = \Phi([t^2]_{\mathcal{R}}) = -1 = i^2 = i \cdot i = \Phi([t]_{\mathcal{R}}) \cdot \Phi([t]_{\mathcal{R}})$$

Γενικότερα μπορούμε να δούμε εύκολα ότι η «1-1» και «επί» απεικόνιση Φ διατηρεί τος πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στα σύνολα $\mathbb{R}[t]/\mathcal{R}$ και $\mathbb{C}$, δηλαδή:

$$\Phi([P(t)_{\mathcal{R}}] + [Q(t)_{\mathcal{R}}]) = \Phi([P(t)_{\mathcal{R}}]) + \Phi([Q(t)_{\mathcal{R}}]) \qquad \& \qquad \Phi([P(t)_{\mathcal{R}}] \cdot [Q(t)_{\mathcal{R}}]) = \Phi([P(t)_{\mathcal{R}}]) \cdot \Phi([Q(t)_{\mathcal{R}}])$$

Όπως θα δούμε και αργότερα αυτό σημαίνει ότι οι αλγεβρικές δομές $(\mathbb{R}[t]/\mathcal{R}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ έχουν τις ίδιες αλγεβρικές ιδιότητες και επομένως μπορούμε να τις ταυτίσουμε μέσω της «1-1» και «επί» απεικόνισης Φ η οποία διατηρεί τις πράξεις.[4] Με βάση αυτή τη ταύτιση τον ρόλο της φανταστικής μονάδας παίζει η κλάση ισοδυναμίας $[t]_{\mathcal{R}}$ του πολυώνυμου t.

[4]Οι τριάδες $(\mathbb{R}[t]/\mathcal{R}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ έχουν την αλγεβρική δομή του *μεταθετικού δακτυλίου με μονάδα*, ειδικότερα του *σώματος*, και όπως θα δούμε αργότερα, η απεικόνιση Φ είναι ένας *ισομορφισμός δακτυλίων*.

Σχόλιο. *Οι παραπάνω Ἀσκήσεις 15, 16, και 17, "κατασκευάζουν":*

(1) *Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών από το σύνολο $\mathbb{N}_0$ των φυσικών αριθμών μαζί με το 0, ως σύνολο-πηλίκο μιας κατάλληλης σχέσης ισοδυναμίας $\mathcal{R}_1$ επί του $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.*

(2) *Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών από το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών ως σύνολο-πηλίκο μιας κατάλληλης σχέσης ισοδυναμίας $\mathcal{R}_2$ επί του $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.*

(3) *Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών από το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, σε δύο βήματα: το πρώτο βήμα είναι η κατασκευή συνόλου $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})$ των ακολουθιών Cauchy ρητών αριθμών, και το δεύτερο βήμα είναι η κατασκευή του συνόλου-πηλίκο μιας κατάλληλης σχέσης ισοδυναμίας $\mathcal{R}_3$ επί του συνόλου $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})$.*

Το σύνολο των ακολουθιών Cauchy ρητών αριθμών κατασκευάζεται από το $\mathbb{Q}$ ως το εξής υποσύνολο $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})$ του συνόλου $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots$ των ακολουθιών ρητών αριθμών:

$$\mathcal{CS}(\mathbb{Q}) = \big\{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \mid \forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ |r_n - r_m| < \epsilon,\ \forall m, n \geq n_0\big\}$$

(4) *Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών από το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, σε δύο βήματα: το πρώτο βήμα είναι η κατασκευή του συνόλου $\mathbb{R}[t]$ των πολυωνύμων με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς, και το δεύτερο βήμα είναι η κατασκευή του συνόλου-πηλίκο μιας κατάλληλης σχέσης ισοδυναμίας $\mathcal{R}_4$ επί του συνόλου $\mathbb{R}[t]$.*

Το σύνολο $\mathbb{R}[t]$ των πολυωνύμων με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς κατασκευάζεται από το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ως το εξής υποσύνολο $\mathbb{R}[t]$ του συνόλου $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ των ακολουθιών πραγματικών αριθμών αριθμών:

$$\mathbb{R}[t] = \big\{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \mid \exists n \in \mathbb{N}:\ r_m = 0,\ \ \forall m > n\big\}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι σχέσεις ισοδυναμίας $\mathcal{R}_i$, $1 \leq i \leq 4$, είναι συμβιβαστές με τις πράξεις της πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στα σύνολα $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $\mathcal{CS}(\mathbb{Q})$, και $\mathbb{R}[t]$ οι οποίες επάγονται διαδοχικά με φυσικό τρόπο από τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών. Ἐτσι τα αντίστοιχα σύνολα πηλίκα είναι εφοδιασμένα με πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού οι οποίες αντιστοιχούν με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στα σύνολα $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, και $\mathbb{C}$ μέσω των «1-1» και «επί» απεικονίσεων που κατασκευάστηκαν στις ασκήσεις 15, 16, και 17.

Ἐτσι ξεκινώντας από το σύνολο των φυσικών αριθμών (μαζί με το 0) και τις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών, μπορούμε με τις παραπάνω κατασκευές να ορίσουμε τα σύνολα $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών, $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, και $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, τα οποία είναι εφοδιασμένα με τις γνωστές πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού. ▲

Ἀσκηση 18. *Εξετάστε στις παρακάτω περιπτώσεις αν η διμελής πράξη «$\star$» επί του συνόλου G είναι προσεταιριστική, μεταθετική, υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, και αν κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο.*

(1) $G = \mathbb{Z}$ *και* $a \star b = ab$.
(2) $G = \mathbb{Z}$ *και* $a \star b = a - b$.
(3) $G = \mathbb{R}^+$ *και* $a \star b = ab$.
(4) $G = \mathbb{Q}$ *και* $a \star b = ab$.
(5) $G = \mathbb{R}^*$ *και* $a \star b = ab$.
(6) $G = \mathbb{Z}^+$ *και* $a \star b = 2^{ab}$.
(7) $G = \mathbb{Z}^+$ *και* $a \star b = a^b$.
(8) $G = \mathbb{C}$ *και* $a \star b = a + b$.

Λύση. (1) Ο πολλαπλασιασμός μεταξύ ακεραίων αριθμών είναι προσεταιριστικός. Το στοιχείο $e = 1$ είναι το ουδέτερο της πράξης αφού $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Ὁμως για κάθε $x \in \mathbb{Z}$ δεν υπάρχει αντίστροφο στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιαμό που να ανήκει στο $\mathbb{Z}$. Για παράδειγμα το $6 \in \mathbb{Z}$ και από την εξίσωση $6 \cdot x = 1$ έπεται ότι $x = \frac{1}{6}$ και $\frac{1}{6} \notin \mathbb{Z}$.

(2) Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$(a \star b) \star c = (a - b) \star c = a - b - c$$

και

$$a \star (b \star c) = a \star (b - c) = a - b + c$$

Συνεπώς η πράξη $a \star b = a - b$ δεν είναι προσεταιριστική. Έστω $x \in G$ έτσι ώστε $a \star x = a = x \star a$ για κάθε $a \in G$. Τότε από τη σχέση $a \star x = a$ έχουμε ότι $x = 0$ ενώ από τη σχέση $x \star a = a$ έπεται ότι $x = 2a$. Άρα θα έπρεπε το $a = 0$, που είναι άτοπο. Συνεπώς στο σύνολο $G = \mathbb{Z}$ η πράξη $a \star b = a - b$ δεν είναι προφανώς μεταθετική, δεν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο και άρα ούτε αντίστροφο.

(3) Η προσεταιριστική και μεταθετική ιδιότητα προφανώς ισχύουν, το ουδέτερο στοιχείο είναι το $e = 1 \in \mathbb{R}^+$, και για κάθε $a \in \mathbb{R}^+$ το αντίστροφο στοιχείο είναι το $a' = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+$.

(4) Η προσεταιριστική και η μεταθετική ιδιότητα ισχύουν, το ουδέτερο στοιχείο είναι το $e = 1$, αλλά αν $\frac{\kappa}{\lambda} \in \mathbb{Q}$ τότε το αντίστροφο στοιχείο $a' = \frac{\lambda}{\kappa}$ μπορεί να μην ορίζεται γιατί το κ μπορεί να είναι ίσο με μηδέν. Αντίθετα όμως στο σύνολο $\mathbb{Q}^*$ κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο ως προς τον πολλαπλασιασμό.

(5) Πολύ εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $G = \mathbb{R}^*$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό $a \star b = ab$ ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες.

(6) Η πράξη είναι μεταθετική δίοτι $a \star b = 2^{ab} = 2^{ba} = b \star a$ αλλά δεν είναι προσεταιριστική, διότι

$$a \star (b \star c) = a \star 2^{bc} = 2^{a \cdot 2^{bc}} \qquad \text{και} \qquad (a \star b) \star c = 2^{ab} \star c = 2^{2^{ab} \cdot c}$$

και γενικά $2^{a \cdot 2^{bc}} \neq 2^{2^{ab} \cdot c}$ όπως μπορούμε να δούμε εύκολα επιλέγοντας για παράδειγμα $a = 1$, $b = 2$, και $c = 3$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος e έτσι ώστε $a \star e = a = e \star a$, $\forall a \in \mathbb{Z}^+$. Τότε:

$$a \star e = a \implies 2^{ae} = a \implies \log_2(2^{ae}) = \log_2(a) \implies ae = \log_2(a) \implies e = \frac{\log_2(a)}{a}$$

Ιδιαίτερα για $a = 4$ θα έχουμε ότι $e = \frac{\log_2(4)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$ και αυτό είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει στοιχείο $e \in \mathbb{Z}^+$ έτσι ώστε $a \star e = a = e \star a$, $\forall a \in \mathbb{Z}^+$, δηλαδή δεν υπάρχει[5] ουδέτερο στοιχείο (και άρα και αντίστροφο στοιχείου) για την πράξη «$\star$» επί του $\mathbb{Z}^+$.

(7) Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ έχουμε ότι

$$(a \star b) \star c = a^b \star c = (a^b)^c = a^{bc}$$

και

$$a \star (b \star c) = a \star b^c = a^{b^c}$$

Όμως υπάρχουν $b, c \in \mathbb{Z}^+$ έτσι ώστε $bc \neq b^c$ και άρα η πράξη $\star$ δεν είναι προσεταιριστική. Επίσης η πράξη δεν είναι ούτε μεταθετική. Έστω $x \in \mathbb{Z}^+$ έτσι ώστε $a \star x = a = x \star a$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}^+$. Τότε από τη σχέση $a \star x = a$ έχουμε ότι $a^x = a$ και άρα $x = 1$, ενώ από τη σχέση $x \star a = a$ έπεται ότι $x^a = a$. Άρα για $x = 1$ έχουμε $a = 1$, που είναι άτοπο. Συνεπώς στο σύνολο $G = \mathbb{Z}^+$ με πράξη $a \star b = a^b$ δεν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο και άρα ούτε αντίστροφο.

(8) Η προσεταιριστική και μεταθετική ιδιότητα προφανώς ισχύουν. Επίσης υπάρχει μιγαδικός αριθμός $e = 0 + 0i = 0 \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $a \star e = a + 0 = a = 0 + a = e \star a$ για κάθε $a \in \mathbb{C}$ και άρα το $e = 0$ είναι το ουδέτερο στοιχείο. Τέλος, για κάθε $a = m + ni \in \mathbb{C}$ υπάρχει ο μιγαδικός αριθμός $a' = -a = -m - ni \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $a + (-a) = 0$ και άρα κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο. ■

Άσκηση 19. *Έστω $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (δηλαδή G είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών εκτός από το -1), και ορίζουμε*

$$\forall x, y \in G : \qquad x \star y = x + y + xy$$

(1) *Να δείξετε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι μια διμελής πράξη επί του G.*

(2) *Να εξετασθεί αν η πράξη $\star$ είναι προσεταιριστική ή μεταθετική.*

(3) *Να εξετασθεί αν υπάρχει στοιχείο $e \in G$ έτσι ώστε: $x \star e = x = e \star x$, $\forall x \in G$. Αν ένα τέτοιο στοιχείο e υπάρχει, είναι μοναδικό;*

(4) *Στην περίπτωση κατά την οποία ένα στοιχείο e όπως στο (3) υπάρχει και είναι μοναδικό, να εξετασθεί αν για κάθε $x \in G$, υπάρχει $y \in G$ έτσι ώστε: $x \star y = e = y \star x$.*

---

[5]Διαφορετικά: όπως γνωρίζουμε, αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e για μια πράξη «$\star$» επί ενός συνόλου S, τότε αυτό είναι μοναδικό. Στην περίπτωση του μέρους 6 βλέπουμε ότι ένα στοιχείο e με την ιδιότητα $a \star e = a = e \star a$, $\forall a \in \mathbb{Z}^+$ εξαρτάται από το a και άρα δεν μπορεί να είναι μοναδικό. Έτσι βλέπουμε ότι δεν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο για την πράξη «$\star$» επί του $\mathbb{Z}^+$.

(5) *Τέλος να εξετασθεί αν η εξίσωση:*

$$a \star x = b$$

έχει (μοναδική) λύση στο σύνολο G.

Λύση. Έστω $x, y \in G$. Θα δείξουμε πρώτα ότι το $x \star y \in G$, δηλαδή ότι η «$\star$» είναι διμελής πράξη. Αν λοιπόν $x \star y \notin G$ τότε

$$x + y + xy = -1 \implies x \cdot (1+y) + y + 1 = 0 \implies (x+1)\cdot(y+1) = 0 \implies x+1 = 0 \text{ ή } y+1 = 0$$

και άρα $x = -1$ ή $y = -1$. Σε κάθε περίπτωση όμως έχουμε άτοπο διότι $x, y \in G$, δηλαδή $x \neq -1$ και $y \neq -1$. Επομένως δείξαμε ότι η απεικόνιση «$\star$» ορίζει μια (διμελή) πράξη $\star\colon G \times G \longrightarrow G$ επί του G.

Έστω $x, y, z \in G$. Έχουμε:

- Η πράξη «$\star$» είναι προσεταιριστική:

$$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= x \star (y + z + yz) \\ &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \\ &= (x + y + xy) \star z \\ &= (x \star y) \star z \end{aligned}$$

- Η πράξη «$\star$» είναι μεταθετική:

$$\begin{aligned} x \star y &= x + y + xy \\ &= y + x + yx \\ &= y \star x \end{aligned}$$

Άρα η πράξη $\star$ είναι προσεταιριστική και μεταθετική.

- Ουδέτερο στοιχείο: Έστω στοιχείο $e \in G$ έτσι ώστε $x \star e = x = e \star x$, $\forall x \in G$. Τότε

$$x + e + ex = x \implies e + ex = 0 \implies \begin{cases} e \cdot (1+x) = 0 \\ \\ 1 + x \neq 0 \end{cases} \implies e = 0$$

Το στοιχείο $e = 0 \in G$ πράγματι ικανοποιεί τις σχέσεις $x \star 0 = x + 0 + 0 \cdot x = x$, $\forall x \in G$. Συνεπώς το $e = 0$ είναι ουδέτερο στοιχείο της πράξης «$\star$» επί του συνόλου G και είναι προφανώς μοναδικό.

- Αντίστροφο στοιχείο: Έστω $x \in G$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $y \in G$ έτσι ώστε $x \star y = 0$. Τότε

$$x + y + x \cdot y = 0 \implies y \cdot (1+x) = -x \implies y = \frac{-x}{1+x} \in G$$

διότι διαφορετικά, αν $\frac{-x}{1+x} \notin G$, δηλαδή $\frac{-x}{1+x} = -1$, τότε καταλήγουμε στο άτοπο $x = x + 1$.

Αντίστροφα θα έχουμε:

$$x \star \frac{-x}{1+x} = x + \frac{-x}{1+x} + \frac{x \cdot (-x)}{1+x} = \frac{x + x^2 - x - x^2}{1+x} = 0 = \frac{-x}{1+x} \star x$$

Επομένως για κάθε $x \in G$, υπάρχει $y = \frac{-x}{1+x} \in G$ έτσι ώστε: $x \star y = 0 = y \star x$, δηλαδή:

$$x' = \frac{-x}{1+x}$$

- Η Εξίσωση $a \star x = b$: Για κάθε $a, b \in G$ έχουμε:

$$\begin{aligned} a \star x = b &\implies a + x + ax = b \\ &\implies x + ax = b - a \\ &\implies x \cdot (1+a) = b - a \\ &\implies x = \frac{b-a}{1+a} \in G \end{aligned}$$

Διαφορετικά:

$$\begin{aligned} a\star x=b &\implies a'\star(a\star x)=a'\star b\\ &\implies (a'\star a)\star x=\frac{-a}{1+a}\star b\\ &\implies 0\star x=\frac{-a}{1+a}+b+\frac{-a}{1+a}\cdot b\\ &\implies x=\frac{b-a}{1+a}\in G \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση $a\star x=b$ έχει μοναδική λύση την

$$x=\frac{b-a}{1+a}$$

■

Άσκηση 20. *Έστω ότι $\mathbb{K}$ συμβολίζει ένα από τα ακόλουθα σώματα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, και έστω $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ το σύνολο των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$. Υπενθυμίζουμε ότι δύο πίνακες $A,B\in\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ καλούνται* **ισοδύναμοι** *αν υπάρχει αντιστρέψιμος $n\times n$ πίνακας P και αντιστρέψιμος $m\times m$ πίνακας Q έτσι ώστε:*

$$Q^{-1}\cdot A\cdot P=B$$

(1) *Δείξτε ότι ορίζοντας:*

$$A\sim B \iff \text{ο πίνακας } A \text{ είναι ισοδύναμος με τον } B$$

αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(2) *Να περιγραφεί το σύνολο πηλίκο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})/\sim$.*

(3) *Είναι η πρόσθεση, και ο πολλαπλασιασμός πινάκων (όταν $m=n$), συμβιβαστή πράξη με την σχέση ισοδυναμίας πινάκων;*

Λύση. **1.** Έστω $A,B,C\in\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Έχουμε:

- Ανακλαστική ιδιότητα: δηλαδή $\boxed{A\sim A}$:

Θεωρούμε τους πίνακες

$$I_m=\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{pmatrix}\in\mathsf{M}_{m\times m}(\mathbb{K}) \quad \text{και} \quad I_n=\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{pmatrix}\in\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

Τότε $I_m^{-1}\cdot A\cdot I_n=I_m\cdot A\cdot I_n=A$ και άρα $A\sim A$, δηλαδή ο πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον εαυτό του.

- Συμμετρική ιδιότητα: δηλαδή $\boxed{A\sim B\ \Rightarrow\ B\sim A}$:

Επειδή $A\sim B$ υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P\in\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ και $Q\in\mathsf{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε

$$Q^{-1}\cdot A\cdot P=B\implies Q\cdot B\cdot P^{-1}=A\implies (Q^{-1})^{-1}\cdot B\cdot P^{-1}=A\implies B\sim A$$

- Μεταβατική ιδιότητα: δηλαδή $\boxed{A\sim B \text{ και } B\sim C\ \Rightarrow\ A\sim C}$:

Επειδή $A\sim B$ και $B\sim C$, υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P_1,P_2\in\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ και $Q_1,Q_2\in\mathsf{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l} Q_1^{-1}\cdot A\cdot P_1=B\\[2ex] Q_2^{-1}\cdot B\cdot P_2=C\end{array}\right. \implies Q_2^{-1}\cdot Q_1^{-1}\cdot A\cdot P_1\cdot P_2=C &\implies (Q_1\cdot Q_2)^{-1}\cdot A\cdot(P_1\cdot P_2)=C\\ &\implies A\sim C\end{aligned}$$

Άρα η σχέση "$\sim$" είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

2. Από την Γραμμική Άλγεβρα, γνωρίζουμε ότι:

$$A \sim B \iff \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B) \tag{†}$$

όπου $\mathbf{r}(A)$ είναι η *βαθμίδα* του πίνακα A. Ως συνέπεια έχουμε ότι αν $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και $\mathbf{r}(A) = r$, τότε $\mathbf{r}(A) \leq \min\{m, n\}$ και

$$A \sim I_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου α αριθμός 1 εμφανίζεται r φορές. Ορίζουμε μια αντιστοιχία

$$\Phi : \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})/\sim \longrightarrow \{0, 1, 2, \cdots, \min\{m, n\}\}, \quad \Phi\big([A]\big) = \mathbf{r}(A)$$

(1) <u>*Η Φ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση*</u>: Έστω $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, και έστω ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας τους ως προς την σχέση ισοδυναμίας $\sim$ είναι ίσες: $[A] = [B]$. Τότε όπως γνωρίζουμε, ισχύει ότι $A \sim B$ και επομένως από την σχέση (†) θα έχουμε $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B)$. Αυτό σημαίνει ότι $\Phi\big([A]\big) = \Phi\big([B]\big)$ και επομένως η Φ είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση.

(2) <u>*Η Φ είναι «1-1»*</u>: Έστω $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $\Phi\big([A]\big) = \Phi\big([B]\big)$, δηλαδή $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B)$. Τότε από την σχέση (†) θα έχουμε $A \sim B$ και επομένως $[A] = [B]$, δηλαδή η απεικόνιση Φ είναι 1-1.

(3) <u>*Η Φ είναι «επί»*</u>: Έστω $r \in \{0, 1, 2, \cdots, \min\{m, n\}\}$. Τότε ο $m\times n$ πίνακας I_r έχει βαθμίδα $\mathbf{r}(I_r) = r$ και προφανώς: $\Phi([I_r]) = r$.

Επομένως η απεικόνιση Φ είναι μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου πηλίκο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})/\sim$ και του συνόλου $\{0, 1, 2, \cdots, \min\{m, n\}\}$:

$$\Phi : \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})/\sim \quad\longrightarrow\quad \big\{0, 1, 2, \cdots, \min\{m, n\}\big\}$$

3. Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε $A \sim B$ και $\Gamma \sim \Delta$ διότι $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B) = 1$ και $\mathbf{r}(\Gamma) = \mathbf{r}(\Delta) = 1$. Όμως $\mathbf{r}(A\Gamma) = 0 \neq 1 = \mathbf{r}(B\Delta)$ αφού

$$A \cdot \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ και } \ B \cdot \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς $A\Gamma \nsim B\Delta$ και άρα ο πολλαπλασιασμός πινάκων (όταν $m = n$) δεν είναι συμβιβαστή πράξη με την σχέση ισοδυναμίας πινάκων.

Θεωρούμε τους πίνακες A, Γ και Δ όπως παραπάνω. Τότε $A \sim A$ και $\Gamma \sim \Delta$ αλλά $\mathbf{r}(A+\Gamma) = 1 \neq 2 = \mathbf{r}(A + \Delta)$, αφού

$$A + \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ και } \ A + \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως $A + \Gamma \nsim A + \Delta$ και άρα η πρόσθεση πινάκων (όταν $m = n$) δεν είναι συμβιβαστή πράξη με την σχέση ισοδυναμίας πινάκων. ■