ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Ακαδημαϊκο Ετος 2023-2024

Επιλυση Ασκησεων - Φυλλαδιο 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI2024/ASI2024.html

Πέμπτη 18 Απριλίου 2024

Άσκηση 1. Βρείτε όλα τα σύμπλοκα (πλευρικές κλάσεις) της υποομάδας $H \leq G$ της ομάδας G και περιγράψτε την ομάδα πηλίκο στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(1) $H = 4\mathbb{Z} \ \leq \ \mathbb{Z}$.
(2) $H = 4\mathbb{Z} \ \leq \ 2\mathbb{Z}$.
(3) $H = \langle [18]_{36} \rangle \ \leq \ \mathbb{Z}_{36}$.

Λύση. Όλες οι εμπλεκόμενες ομάδες είναι προσθετικές, και άρα ο συμβολισμός μας εδώ θα είναι προσθετικός. Επίσης όλες οι ομάδες είναι κυκλικές και ιδιαίτερα αβελιανές[1].

(1) Το αριστερό σύμπλοκο (αριστερή πλευρική κλάση) της $4\mathbb{Z}$ που περιέχει το $m \in \mathbb{Z}$ είναι της μορφής

$$m + 4\mathbb{Z}$$

- Για $m = 0$ το σύμπλοκο που περιέχει το 0: είναι το

$$4\mathbb{Z} = \{\cdots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \cdots\}$$

- Για να προσδιορίσουμε ένα διαφορετικό αριστερό σύμπλοκο, επιλέγουμε κάποιο στοιχείο του $\mathbb{Z}$ που δεν ανήκει στο $4\mathbb{Z}$, για παράδειγμα το $1 \in \mathbb{Z}$ αλλά $1 \notin 4\mathbb{Z}$. Συνεπώς για $m = 1$ έχουμε το αριστερό σύμπλοκο

$$1 + 4\mathbb{Z} = \{\cdots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \cdots\}$$

- Για $m = 2$ έχουμε το αριστερό σύμπλοκο

$$2 + 4\mathbb{Z} = \{\cdots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \cdots\}$$

- Για $m = 3$ έχουμε το αριστερό σύμπλοκο

$$3 + 4\mathbb{Z} = \{\cdots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \cdots\}$$

Είναι φανερό ότι αυτά τα τέσσερα σύμπλοκα εξαντλούν το $\mathbb{Z}$ και άρα αποτελούν τη διαμέριση του $\mathbb{Z}$ στα αριστερά σύμπλοκα της $4\mathbb{Z}$, δηλαδή

$$\mathbb{Z} = (4\mathbb{Z}) \cup (1 + 4\mathbb{Z}) \cup (2 + 4\mathbb{Z}) \cup (3 + 4\mathbb{Z})$$

Όμως αφού η $\mathbb{Z}$ είναι αβελιανή ομάδα έχουμε ότι το αριστερό σύμπλοκο $m + 4\mathbb{Z}$ ταυτίζεται με το δεξιό σύμπλοκο $4\mathbb{Z} + m$. Άρα η διαμέριση του $\mathbb{Z}$ σε δεξιά σύμπλοκα είναι η ίδια.

Η ομάδα πηλίκο $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ είναι προφανώς η κυκλική ομάδα

$$\mathbb{Z}_4 = \big\{[0]_4 = 4\mathbb{Z}, \quad [1]_4 = 1 + 4\mathbb{Z}, \quad [2]_4 = 2 + 4\mathbb{Z}, \quad [3]_4 = 3 + 4\mathbb{Z}\big\}$$

[1]**Σχόλιο:** Έστω G μια αβελιανή ομάδα και $H \leq G$. Τότε τα αριστερά σύμπλοκα της H στην G συμπίπτουν με τα δεξιά σύμπλοκα της H στην G. Από εδώ και στο εξής, όταν έχουμε μια αβελιανή ομάδα G θα υπολογίζουμε τα αριστερά σύμπλοκα της H, γνωρίζοντας ότι αυτά συμπίπτουν με τα δεξιά. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι η συλλογή όλων των διακεκριμένων (αριστερών) συμπλόκων μιας υποομάδας αποτελεί μια διαμέριση της ομάδας, και άρα εκ΄ κατασκευής η ένωση όλων των διακεκριμένων (αριστερών) συμπλόκων της H στην G, είναι μια ξένη ένωση η οποία συμπίπτει με την ομάδα G.

(2) Τα σύμπλοκα της $4\mathbb{Z}$ στην $2\mathbb{Z}$ είναι της μορφής $m + 4\mathbb{Z}$ με $m \in 2\mathbb{Z}$. Έχουμε:

- Για $m = 0$ έχουμε το σύμπλοκο
$$4\mathbb{Z} = \{\cdots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \cdots\}$$
- Για $m = 2$ έχουμε το σύμπλοκο
$$2 + 4\mathbb{Z} = \{\cdots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \cdots\}$$

Τα παραπάνω δυο σύμπλοκα που βρήκαμε εξαντλούν το $2\mathbb{Z}$ και άρα αποτελούν τη διαμέριση του $2\mathbb{Z}$ στα σύμπλοκα της $4\mathbb{Z}$. Άρα
$$2\mathbb{Z} = (4\mathbb{Z}) \cup (2 + 4\mathbb{Z})$$

Η ομάδα πηλίκο $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ είναι μια ομάδα τάξης 2:
$$2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \big\{4\mathbb{Z},\ 2 + 4\mathbb{Z}\big\}$$
και άρα, όπως γνωρίζουμε, είναι μια κυκλική ομάδα τάξης 2 με γεννήτορα την κλάση $2 + 4\mathbb{Z}$.

(3) Τα σύμπλοκα της $\langle [18]_{36} \rangle$ στην $\mathbb{Z}_{36}$ είναι της μορφής $[m] + \langle [18]_{36} \rangle$ όπου $[m] \in \mathbb{Z}_{36}$. Εδώ $[m]$ συμβολίζει $[m]_{36}$. Θα έχουμε:

- Για $[m] = [0]$ έχουμε το σύμπλοκο (την κλάση)
$$\langle [18] \rangle = \{[0], [18]\}$$
- Για $[m] = [1]$ έχουμε το σύμπλοκο (την κλάση)
$$[1] + \langle [18] \rangle = \{[1], [19]\}$$
- Για $[m] = [2]$ έχουμε το σύμπλοκο (την κλάση)
$$[2] + \langle [18] \rangle = \{[2], [20]\}$$
- Για $[m] = [3]$ έχουμε το σύμπλοκο (την κλάση)
$$[3] + \langle [18] \rangle = \{[3], [21]\}$$
- Για $[m] = [4]$ έχουμε το σύμπλοκο (την κλάση)
$$[4] + \langle [18] \rangle = \{[4], [22]\}$$
- Για $[m] = [5]$ έχουμε το σύμπλοκο (την κλάση)
$$[5] + \langle [18] \rangle = \{[5], [23]\}$$
- Για $[m] = [6]$ έχουμε το σύμπλοκο (την κλάση)
$$[6] + \langle [18] \rangle = \{[6], [24]\}$$
- Για $[m] = [7]$ έχουμε το σύμπλοκο (την κλάση)
$$[7] + \langle [18] \rangle = \{[7], [25]\}$$
- Για $[m] = [8]$ έχουμε το σύμπλοκο (την κλάση)
$$[8] + \langle [18] \rangle = \{[8], [26]\}$$
- $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- Για $[m] = [16]$ έχουμε το σύμπλοκο (την κλάση)
$$[16] + \langle [18] \rangle = \{[16], [34]\}$$
- Για $[m] = [17]$ έχουμε το σύμπλοκο (την κλάση)
$$[17] + \langle [18] \rangle = \{[17], [35]\}$$

Είναι φανερό ότι τα παραπάνω σύμπλοκα (κλάσεις) εξαντλούν το $\mathbb{Z}_{36}$ και άρα αποτελούν τη διαμέριση του $\mathbb{Z}_{36}$ στα σύμπλοκα (κλάσεις) της $\langle [18]_{36} \rangle$. Συνεπώς:

$$\mathbb{Z}_{36} = \big(\langle [18] \rangle\big) \cup \big([1] + \langle [18] \rangle\big) \cup \cdots \cup \big([17] + \langle [18] \rangle\big)$$

είναι κυκλική τάξης 36 με γεννήτορα την κλάση $[1] + \langle [18] \rangle$. □

Άσκηση 2. Να δοθεί παράδειγμα ομάδας G η οποία περιέχει μια υποομάδα H έτσι ώστε ο «πολλαπλασιασμός» αριστερών πλευρικών κλάσεων $xH \cdot yH = (xy)H$ να μην είναι καλά ορισμένος και επομένως το ζεύγος $(G/\!\sim_H, \cdot)$ δεν αποτελεί ομάδα.

Λύση. Θεωρούμε τη συμμετρική ομάδα S_3 και έστω $H = \langle \mu_1 \rangle$.

Για τις αριστερές πλευρικές κλάσεις $\mu_2 H$ και $\mu_3 H$, επειδή $\mu_2\mu_3 = \rho_1$, έχουμε:

$$\mu_2 H \cdot \mu_3 H = (\mu_2\mu_3)H = \rho_1 H$$

Επειδή $\mu^2 = \iota$, θα έχουμε $\mu_2^{-1} = \mu_2$ και τότε: $\mu_2^{-1}\rho_2 = \mu_1$. Επομένως θα έχουμε:

$$\mu_2^{-1}\rho_2 = \mu_1 \in H \quad \Longrightarrow \quad \mu_2 H = \rho_2 H$$

Αν ο «πολλαπλασιασμός» αριστερών πλευρικών κλάσεων $xH \cdot yH = (xy)H$ ήταν καλά ορισμένη πράξη, θα έπρεπε να είχαμε:

$$\mu_2 H = \rho_2 H \quad \text{και} \quad \mu_3 H = \mu_3 H \quad \Longrightarrow \quad (\mu_2\mu_3)H = (\rho_2\mu_3)H$$

Επειδή $\mu_2\mu_3 = \rho_1$ και $\rho_2\mu_3 = \mu_1 \in H$, θα έπρεπε να είχαμε:

$$\rho_1 H = \mu_1 H = H \quad \Longrightarrow \quad \rho_1^{-1} = \rho_2 \in H$$

το οποίο είναι άτοπο διότι $\rho_2 \notin H = \langle \mu_1 \rangle = \big\{\iota,\, \mu_1\big\}$.

Άρα, πράγματι ο «πολλαπλασιασμός» αριστερών πλευρικών κλάσεων $xH \cdot yH = (xy)H$ στο σύνολο-πηλίκο $\mathsf{S}_3/\!\sim_H$ δεν είναι καλά ορισμένος και επομένως το ζεύγος $(\mathsf{S}_3/\!\sim_H, \cdot)$ δεν αποτελεί ομάδα. □

Άσκηση 3. Θεωρούμε την ομάδα ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ και έστω $H = \langle ([2]_4, [1]_6) \rangle$ η κυκλική υποομάδα της $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ η οποία παράγεται από το στοιχείο $([2]_4, [1]_6)$. Να δειχθεί ότι η ομάδα πηλίκο $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/H$ είναι κυκλική.

Λύση. Επειδή

$$\mathsf{o}([2]_4) = \mathsf{o}(2[1]_4) = \frac{\mathsf{o}([1]_4}{(2, \mathsf{o}([1]_4)} = \frac{4}{(2,4)} = \frac{4}{2} = 2$$

και επειδή προφανώς

$$\mathsf{o}([1]_6) = \mathsf{o}([1]_6) = 6$$

έπεται ότι: $\mathsf{o}(([2]_4, [1]_6)) = [\mathsf{o}([2]_4), \mathsf{o}([1]_6)] = [2, 6] = 6$.

Τα στοιχεία της υποομάδας $H = \langle ([2]_4, [1]_6) \rangle$ είναι:

$$H = \langle ([2]_4, [1]_6) \rangle = \big\{([0]_4, [0]_6),\ ([2]_4, [1]_6),\ ([0]_4, [2]_6),\ ([2]_4, [3]_6),\ ([0]_4, [4]_6),\ ([2]_4, [5]_6)\big\}$$

Επειδή η ομάδα $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ είναι αβελιανή, έπεται ότι η υποομάδα H είναι κανονική, και θα έχουμε:

$$|(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/H| = \frac{|(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)|}{|H|} = \frac{|\mathbb{Z}_4| \cdot |\mathbb{Z}_6|}{|H|} = \frac{24}{6} = 4$$

Θα προσδιορίσουμε τα στοιχεία της ομάδας πηλίκο

$$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/H = \big\{a + H \subseteq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \mid x \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6\big\}$$

Θα έχουμε το αριστερό σύμπλοκο H. Το στοιχείο $([1]_4, [1]_6)$ δεν ανήκει στην υποομάδα H, και άρα θα έχουμε το αριστερό σύμπλοκο $([1]_4, [1]_6) + H$. Παρόμοια, το στοιχείο $([2]_4, [2]_6)$ δεν ανήκει στην ένωση $H \cup (([1]_4, [1]_6) + H)$. Πράγματι, από την παραπάνω περιγραφή των στοιχείων της H έπεται ότι $([2]_4, [2]_6) \notin H$, και αν ίσχυε ότι $([2]_4, [2]_6) \in ([1]_4, [1]_6) + H$, θα είχαμε ότι $([2]_4, [2]_6) - ([1]_4, [1]_6) = ([1]_4, [1]_6) \in H$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα θα έχουμε το αριστερό σύμπλοκο $([2]_4, [2]_6) + H$. Τέλος παρόμοια βλέπουμε ότι το στοιχείο $([3]_4,[3]_6)$ δεν ανήκει στην ένωση $H\cup(([1]_4,[1]_6)+H)\cup(([2]_4,[2]_6)+H)$. Επομένως θα έχουμε τα εξής τέσσερα διακεκριμμένα αριστερά σύμπλοκα της H στην $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$. Επειδή, όπως είδαμε παραπάνω: $|(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6)/H|=4$, έπεται ότι:

$$(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6)/H=\big\{H,\ ([1]_4,[1]_6)+H,\ ([2]_4,[2]_6)+H,\ ([3]_4,[3]_6)+H\big\}$$

Επειδή:

$$\big\langle([1]_4,[1]_6)+H\big\rangle=\big\{H,\ ([1]_4,[1]_6)+H,\ ([2]_4,[2]_6)+H,\ ([3]_4,[3]_6)+H\big\}=(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6)/H$$

έπεται ότι η ομάδα πηλίκο $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6)/H$ εναι κυκλική με γεννήτορα το αριστερό σύμπλοκο $([1]_4,[1]_6)+H$. □

Άσκηση 4. Έστω H μια κανονική υποομάδα μιας ομάδας G.

Αν $x,y\in G$, να δείξετε ότι:

$$xy\ \in\ H\quad\Longleftrightarrow\quad yx\ \in\ H\qquad(*)$$

Ισχύει η παραπάνω ισοδυναμία αν η H **δεν** είναι κανονική υποομάδα της G; Αν ισχύει να το αποδείξετε, και αν δεν ισχύει να δώσετε αντιπαράδειγμα.

Λύση. Υπενθυμίζουμε ότι αφού η H είναι κανονική (ορθόθετη) υποομάδα της G έχουμε:

$$\forall g\in G:\qquad gH=Hg$$

Συνεπώς,

$$xy\in H\quad\Longleftrightarrow\quad y\in x^{-1}H=Hx^{-1}\quad\Longleftrightarrow\quad yx\in H$$

Επομένως αν H είναι κανονική υποομάδα της G, τότε δείξαμε ότι ισχύει η σχέση $(*)$.

Θεωρούμε τη συμμετρική ομάδα

$$\mathsf{S}_3=\big\{\iota=\rho_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \rho_1,\ \rho_2\big\}$$

και την κυκλική υποομάδα $H=\langle\mu_1\rangle$ της S_3 η οποία παράγεται από την μετάθεση μ_1.

Τότε η H δεν είναι κανονική υποομάδα της S_3 διότι για παράδειγμα

$$\rho_1H=\big\{\rho_1\iota,\ \rho_1\mu_1\big\}=\big\{\rho_1,\ \mu_3\big\}\ \neq\ \big\{\rho_1,\ \mu_2\big\}=\big\{\iota\rho_1,\ \mu_1\rho_1\big\}=H\rho_1$$

Θεωρούμε τα στοιχεία $x=\rho_2\in\mathsf{S}_3$ και $y=\mu_3\in\mathsf{S}_3$. Τότε:

$$xy=\rho_2\mu_3=\mu_1\ \in\ H\quad\&\quad yx=\mu_3\rho_2=\mu_2\ \notin\ H$$

Άρα αν η υποομάδα H δεν είναι κανονική, τότε η ισοδυναμία (*) δεν ισχύει. □

Άσκηση 5. Έστω G μια ομάδα και H μια πεπερασμένη υποομάδα της G με την ιδιότητα ότι η H είναι η μοναδική υποομάδα της G με τάξη $\mathsf{o}(H)$. Να δείξετε ότι η H είναι κανονική.

Λύση. Από την υπόθεση μας έχουμε ότι αν $K\leq G$ είναι μια άλλη υποομάδα της G με τάξη $\mathsf{o}(K)=\mathsf{o}(H)$ τότε $K=H$. Για κάθε $g\in G$ θεωρούμε την υποομάδα[2] $g^{-1}Hg$ της G. Τότε, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα, η απεικόνιση

$$f:\ H\ \longrightarrow\ g^{-1}Hg,\qquad h\ \longmapsto\ f(h)=g^{-1}hg$$

είναι «1-1» και «επί» και άρα $\mathsf{o}(H)=\mathsf{o}(g^{-1}Hg)$. Συνεπώς επειδή από την υπόθεση υπάρχει μόνον μια υποομάδα της G με τάξη την τάξη της H, έπεται ότι

$$H=g^{-1}Hg,\qquad\forall g\in G$$

και άρα η H είναι κανονική. □

[2]Η υποομάδα $g^{-1}Hg$ καλείται η g-**συζυγής υποομάδα** της G η οποία αντιστοιχεί στην H. Από την Άσκηση 2 του Φυλλαδίου 4, το υποσύνολο $g^{-1}Hg$ είναι πράγματι υποομάδα της G και η τάξη της είναι ίση με: $|g^{-1}Hg|=|H|$.

Άσκηση 6. Έστω η διεδρική ομάδα (ομάδα συμμετριών του τετραγώνου) D_4 τάξης 8, την οποία θεωρούμε ως υποομάδα της S_4, θεωρώντας τα στοιχεία της ως μεταθέσεις των κορυφών $\{1, 2, 3, 4\}$ του τετραγώνου ($\mathsf{Id}_4 = \iota$):

$$\mathsf{D}_4 = \big\{\iota,\ \rho,\ \rho^2,\ \rho^3,\ \sigma,\ \sigma\rho,\ \sigma\rho^2,\ \sigma\rho^3\big\}, \quad \text{όπου} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

και έστω η υποομάδα $H = \big\{\iota, \sigma\rho\big\}$ της D_4, βλέπε την Άσκηση **4** του Φυλλαδίου **5**.

(1) Βρείτε όλα τα αριστερά σύμπλοκα (αριστερές πλευρικές κλάσεις) της υποομάδας H στην D_4.
(2) Βρείτε όλα τα δεξιά σύμπλοκα (δεξιές πλευρικές κλάσεις) της υποομάδας H στην D_4.
(3) Είναι H κανονική (ορθόθετη) υποομάδα της D_4;

Λύση. (1) Τα αριστερά σύμπλοκα της υποομάδας $H = \big\{\iota, \sigma\rho\big\}$ της D_4 είναι τα εξής:
- $\iota H = H$
- $\rho H = \{\rho, \rho\sigma\rho\} = \{\rho, \sigma\rho^3\}$
- $\rho^2 H = \{\rho^2, \rho^2\sigma\rho\} = \{\rho^2, \sigma\}$
- $\rho^3 H = \{\rho^3, \rho^3\sigma\rho\} = \{\rho^3, \sigma\rho^2\}$

Τα παραπάνω σύμπλοκα που βρήκαμε εξαντλούν την ομάδα D_4 και άρα αποτελούν τη διαμέριση της D_4 στα αριστερά σύμπλοκα της $H = \{\iota, \sigma\rho\}$. Άρα έχουμε

$$\mathsf{D}_4 = \{\iota, \sigma\rho\} \bigcup \{\rho, \sigma\rho^3\} \bigcup \{\rho^2, \sigma\} \bigcup \{\rho^3, \sigma\rho^2\}$$

(2) Τα δεξιά σύμπλοκα της υποομάδας $H = \{\iota, \sigma\rho\}$ της D_4 είναι τα εξής:
- $H\iota = H$
- $H\rho = \{\rho, \sigma\rho^2\}$
- $H\rho^2 = \{\rho^2, \sigma\rho^3\}$
- $H\rho^3 = \{\rho^3, \sigma\rho^4\} = \{\rho^3, \sigma\}$

Τα παραπάνω σύμπλοκα αποτελούν τη διαμέριση της D_4 στα δεξιά σύμπλοκα της $H = \{\iota, \sigma\rho\}$. Άρα

$$\mathsf{D}_4 = \{\iota, \sigma\rho\} \bigcup \{\rho, \sigma\rho^2\} \bigcup \{\rho^2, \sigma\rho^3\} \bigcup \{\rho^3, \sigma\}$$

(3) Τα αριστερά σύμπλοκα της υποομάδας $H = \{\iota, \sigma\rho\}$ της D_4 είναι διαφορετικά από τα δεξιά σύμπλοκα, για παράδειγμα $\rho^3 H \neq H\rho^3$, και άρα η H δεν είναι κανονική υποομάδα της D_4. □

Άσκηση 7. Να βρεθεί ο δείκτης της υποομάδας H στην ομάδα G στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(1) $H = \langle [3]_{24} \rangle\ \leq\ \mathbb{Z}_{24}$.
(2) $H = \langle (2\ 3) \rangle\ \leq\ \mathsf{S}_3$.
(3) $H = \langle (1\ 3) \rangle\ \leq\ \mathsf{D}_4$.

όπου $(2\ 3)$ συμβολίζει την μετάθεση $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, και $(1\ 3)$ συμβολίζει την μετάθεση $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Σε ποιές από τις παραπάνω περιπτώσεις η υποομάδα H είναι κανονική υποομάδα της G;

Λύση. Ψπενθυμίζουμε ότι αν $H \trianglelefteq G$ είναι μια κανονική υποομάδα μιας πεπερασμένης ομάδας G, τότε $\mathsf{o}(G/H) = [G : H] = \frac{\mathsf{o}(G)}{\mathsf{o}(H)}$. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι αν $a \in G$, όπου G είναι μια προσθετική ομάδα, τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$: $\mathsf{o}(ka) = \frac{\mathsf{o}(a)}{(k, \mathsf{o}(a))}$.

Με βάση τα παραπάνω, υπολογίζουμε τους ζητούμενους δείκτες:

$$\begin{aligned}
\big[\mathbb{Z}_{24} : \langle [3]_{24} \rangle\big] &= \frac{\mathsf{o}(\mathbb{Z}_{24})}{\mathsf{o}(\langle [3]_{24} \rangle)} = \frac{24}{\frac{24}{(3,24)}} = \frac{24}{8} = 3 \\
\big[S_3 : \langle (2\ 3) \rangle\big] &= \frac{\mathsf{o}(S_3)}{\mathsf{o}(\langle (23) \rangle)} = \frac{6}{2} = 3 \\
\big[D_4 : \langle (1\ 3) \rangle\big] &= \frac{\mathsf{o}(D_4)}{\mathsf{o}(\langle (13) \rangle)} = \frac{8}{2} = 4
\end{aligned}$$

Η ομάδα $\mathbb{Z}_{24}$ είναι αβελιανή και άρα η $H = \langle [3]_{24} \rangle$ είναι κανονική. Για τις άλλες δυο περιπτώσεις υπολογίζοντας τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα της H στην G, διαπιστώνουμε εύκολα ότι η H δεν είναι κανονική υποομάδα της G. □

Άσκηση 8. Έστω G μια ομάδα και $\mathcal{H} = \{H_i \mid i \in I\}$ μια οικογένεια κανονικών υποομάδων της G, όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών. Να δειχθεί ότι η τομή $\bigcap_{i\in I} H_i$ της οικογένειας $\mathcal{H}$ είναι μια κανονική υποομάδα της G.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι η τομή $\bigcap_{i\in I} H_i$ μιας οικογένειας υποομάδων $\mathcal{H} = \{H_i \mid i \in I\}$ μιας ομάδας G είναι υποομάδα της G.

Έστω $x \in G$ και $h \in \bigcap_{i\in I} H_i$. Τότε $h \in H_i$, $\forall i \in I$, και επειδή κάθε H_i είναι κανονική υποομάδα της G, θα έχουμε $x^{-1}hx \in H_i$, $\forall i \in I$. Άρα $x^{-1}hx \in \bigcap_{i\in I} H_i$. Έτσι δείξαμε ότι

$$\forall x \in G,\ \forall h \in \bigcap_{i\in I} H_i : \qquad x^{-1}hx \in \bigcap_{i\in I} H_i$$

Επομένως: $\bigcap_{i\in I} H_i \trianglelefteq G$. □

Άσκηση 9. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και H μια κανονική υποομάδα της G. Αν

$$\big([G : H], \mathsf{o}(H)\big) = 1$$

τότε να δείξετε ότι[3]:

$$\forall x \in G : \quad x^{\mathsf{o}(H)} = e \quad \Longrightarrow \quad x \in H$$

Λύση. Έστω $\mathsf{o}(H) = m$ και $[G : H] = n$. Επειδή η H είναι μια κανονική υποομάδα της G, ορίζεται η ομάδα πηλίκο G/H τάξης

$$\mathsf{o}(G/H) = [G : H] = n$$

Έστω $x \in G$ έτσι ώστε $x^{\mathsf{o}(H)} = e$, δηλαδή $x^m = e$. Τότε έχουμε:

$$(xH)^m = x^m H = eH = H \implies \mathsf{o}(xH) \mid m = \mathsf{o}(H) \tag{1}$$

Όμως

$$\mathsf{o}(xH) \mid n = \mathsf{o}(G/H) \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$\mathsf{o}(xH) \mid (m, n) = 1 \implies \mathsf{o}(xH) = 1 \implies xH = eH \implies x \in H$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Άσκηση 10. Αν G είναι μια ομάδα, να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Η ομάδα G είναι αβελιανή.
(2) Η ομάδα πηλίκο $G/\mathsf{Z}(G)$ είναι κυκλική.

[3] Όπως ήδη γνωρίζουμε, χωρίς καμμία προϋπόθεση, ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή: για κάθε πεπερασμένη ομάδα H και για κάθε στοιχείο της $x \in H$: $x^{\mathsf{o}(x)} = e$.

Αν H είναι μια υποομάδα της G έτσι ώστε $H \leq \mathsf{Z}(G)$, τότε όπως γνωρίζουμε η H είναι κανονική υποομάδα της G. Αν η ομάδα πηλίκο G/H είναι κυκλική, είναι η G αβελιανή;

Λύση. (1) $\Rightarrow$ (2) Αν η G είναι αβελιανή, τότε προφανώς θα έχουμε $G = \mathsf{Z}(G)$. Ώς συνέπεια θα έχουμε ότι η ομάδα πηλίκο θα είναι η τετριμμένη $G/\mathsf{Z}(G) = \{e\mathsf{Z}(G)\} = \langle e\mathsf{Z}(G)\rangle$ και επομένως η ομάδα πηλίκο $G/\mathsf{Z}(G)$ είναι κατά τετριμμένο τρόπο κυκλική.

(2) $\Rightarrow$ (1) Αν η $G/\mathsf{Z}(G)$ είναι κυκλική, έστω $g\mathsf{Z}(G)$ ένας γεννήτοράς της: $G/\mathsf{Z}(G) = \langle g\mathsf{Z}(G)\rangle$.
Έστω $x \in G$. Θεωρούμε το στοιχείο $x\mathsf{Z}(G) \in G/\mathsf{Z}(G)$ και τότε

$$x\mathsf{Z}(G) = (g\mathsf{Z}(G))^k = g^k\mathsf{Z}(G) \implies x^{-1}g^k \in \mathsf{Z}(G) \implies x^{-1}g^k = z \in \mathsf{Z}(G) \implies x = g^k z^{-1}$$

Επομένως δείξαμε ότι:

$$\forall\, x \in G,\ \exists\, k \in \mathbb{Z}\ \&\ \exists\, z_x \in \mathsf{Z}(G): \quad x = g^k z_x$$

Έστω τώρα $x, y \in G$, και όπως παραπάνω μπορούμε να γράψουμε:

$$x = g^k z_x \quad \& \quad y = g^l z_y \quad \text{όπου} \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad \& \quad z_x, z_y \in \mathsf{Z}(G)$$

Τότε, επειδή τα στοιχεία z_x και z_y ανήκουν στο κέντρο της G, θα έχουμε:

$$xy = g^k z_x g^l z_y = g^k g^l z_x z_y = g^{k+l} z_x z_y = g^{l+k} z_y z_x = g^l g^k z_y z_x = g^l z_y g^k z_x = yx$$

Άρα $xy = yx$, $\forall x, y \in G$, και άρα η G είναι αβελιανή.

Έστω H μια υποομάδα της G έτσι ώστε $H \leq \mathsf{Z}(G)$, και επομένως, όπως γνωρίζουμε, η H είναι κανονική υποομάδα της G. Αν η ομάδα πηλίκο G/H είναι κυκλική, τότε η παραπάνω απόδειξη δείχνει ότι η ομάδα G είναι αβελιανή (αντικαθιστούμε στην παραπάνω απόδειξη την υποομάδα $\mathsf{Z}(G)$ με την υποομάδα $H \leq \mathsf{Z}(G)$). ☐

Άσκηση 11. Θεωρούμε την κανονική υποομάδα $\mathbb{Z}$ της προσθετικής ομάδας $\mathbb{R}$. Να βρεθούν όλα τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης της ομάδας–πηλίκο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Λύση. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \big\{x + \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\big\} \quad \text{όπου} \quad x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z} \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

Έστω στοιχείο $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ με $x + \mathbb{Z} \neq 0 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ και έστω ότι η τάξη του $x + \mathbb{Z}$ είναι πεπερασμένη. Τότε υπάρχει $n \geq 1$ έτσι ώστε

$$n \cdot (x + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \implies nx + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \implies nx = m \in \mathbb{Z} \overset{n\neq 0}{\implies} x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

Επομένως δείξαμε ότι

$$\mathsf{o}(x + \mathbb{Z}) < \infty \implies x \in \mathbb{Q} \tag{1}$$

Αντίστροφα τώρα, έστω $\frac{p}{q} + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ με $p, q \in \mathbb{Z}$ και $q \neq 0$. Τότε

$$q \cdot (\frac{p}{q} + \mathbb{Z}) = \frac{pq}{q} + \mathbb{Z} = p + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \implies \mathsf{o}(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}) < \infty \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \big\{r + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{Q}\big\} = \big\{x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mid \mathsf{o}(x + \mathbb{Z}) < \infty\big\}$$

δηλαδή τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης της $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ είναι ακριβώς τα στοιχεία της ομάδας πηλίκο $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ η οποία είναι υποομάδα της ομάδας $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. ☐

Άσκηση 12. Έστω ότι $\phi : G \longrightarrow G'$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.

(1) Να δειχθεί ότι, αν H είναι μια υποομάδα τής G, τότε η εικόνα $\phi(H)$ είναι μια υποομάδα τής G'.
(2) Να δειχθεί ότι, αν K είναι μια υποομάδα τής G', τότε η αντίστροφη εικόνα $\phi^{-1}(K) = \big\{g \in G \mid \phi(g) \in K\big\}$ είναι μια υποομάδα τής G.

Λύση. (1) Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\phi(H)$ δεν είναι το κενό σύνολο, αφού το $H \neq \emptyset$ είναι μια υποομάδα τής G και άρα $e \in H$. Αν $\ell_1, \ell_2 \in \phi(H)$, τότε υπάρχουν $h_1, h_2 \in H$ με $\phi(h_1) = \ell_1$ και $\phi(h_2) = \ell_2$. Παρατηρούμε ότι

$$\ell_1 \ell_2^{-1} = \phi(h_1)\phi(h_2)^{-1} = \phi(h_1)\phi(h_2^{-1}) = \phi(h_1 h_2^{-1})$$

Επειδή τα h_1, h_2 ανήκουν στην υποομάδα H, συμπεραίνουμε ότι και το $h_1 h_2^{-1} \in H$. Επομένως, το στοιχείο $\ell_1 \ell_2^{-1} = \phi(h_1 h_2^{-1})$ ανήκει στο $\phi(H)$ και έτσι το $\phi(H)$ είναι υποομάδα τής G'.

(2) Παρατηρούμε ότι το $\phi^{-1}(K)$ δεν είναι το κενό σύνολο, αφού το ουδέτερο στοιχείο e' τής G' είναι και το ουδέτερο τής υποομάδας K και επειδή $\phi(e) = e'$, όπου e είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας G, έπεται ότι $\phi^{-1}(K) \supseteq \phi^{-1}(\{e_L\}) \neq \emptyset$.

Έστω ότι $g_1, g_2 \in \phi^{-1}(K)$. Θα δείξουμε ότι και το $g_1 g_2^{-1} \in \phi^{-1}(K)$ από όπου θα συμπεράνουμε ότι το $\phi^{-1}(K)$ είναι υποομάδα τής G. Έχουμε:

$$\phi(g_1 g_2^{-1}) = \phi(g_1)\phi(g_2^{-1}) = \phi(g_1)\phi(g_2)^{-1}$$

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο $\phi(g_1)\phi(g_2)^{-1} = \phi(g_1 g_2^{-1})$ ανήκει στην K, διότι τα $\phi(g_1)$ και $\phi(g_2)$ είναι στοιχεία τής K και η K είναι μια υποομάδα τής L. Επομένως, το $g_1 g_2^{-1}$ ανήκει στο $\phi^{-1}(K)$ και γι' αυτό το $\phi^{-1}(K)$ είναι μια υποομάδα τής G. □

Άσκηση 13. Σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις να εξεταστεί αν η απεικόνιση που ορίζεται είναι ομομορφισμός ομάδων και όταν είναι ομομορφισμός, να υπολογιστεί ο πυρήνας του.

(1) $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \phi(z) = z - 1$.
(2) $\phi : \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}^\star, \quad \phi(r) = |r|$ και όπου η πράξη της $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι ο πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών.
(3) $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathsf{GL}_2(\mathbb{R}), \quad \phi(r) = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(4) $\phi : G \longrightarrow G, \quad \phi(g) = g^{-1}$.
(5) $\phi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2, \quad \phi([z]_6) = [z]_2$.
(6) $\phi : \mathbb{Z}_7 \longrightarrow \mathbb{Z}_2, \quad \phi([z]_7) = [z]_2$.

Λύση. (1) Η ϕ δεν είναι ομομορφισμός ομάδων διότι $\phi(0) = -1 \neq 0$[4].

(2) Η απεικόνιση ϕ είναι ομομορφισμός διότι:

$$\phi(rs) = |rs| = |r| \cdot |s| = \phi(r)\phi(s)$$

Έστω $\phi(r) = |r| = 1$, τότε προφανώς $r = \pm 1$. Επομένως $\mathrm{Ker}(\phi) = \{1, -1\}$.

(3) Η απεικόνιση ϕ είναι ομομορφισμός διότι:

$$\phi(r+s) = \begin{pmatrix} 1 & r+s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi(r)\phi(s)$$

Άρα η απεικόνιση ϕ είναι ομομορφισμός ομάδων και

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \big\{ r \in \mathbb{R} \mid \phi(r) = I_2 \big\} = \big\{ r \in \mathbb{R} \mid \left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \big\} = \{ r \in \mathbb{R} \mid r = 0 \} = \{0\}$$

(4) Αν $g_1, g_2 \in G$, τότε θα έχουμε:

$$\phi(g_1 g_2) = (g_1 g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1} \quad \& \quad \phi(g_1)\phi(g_2) = g_1^{-1} g_2^{-1}$$

Επειδή $g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1^{-1} g_2^{-1}$ αν και μόνον αν $(g_1 g_2)^{-1} = (g_2 g_1)^{-1}$ αν και μόνον αν $g_1 g_2 = g_2 g_1$, έπεται ότι η απεικόνιση ϕ είναι ομομορφισμός αν και μόνον αν η ομάδα G είναι αβελιανή.

Υποθέτοντας ότι η G είναι αβελιανή, θα έχουμε ότι η ϕ είναι ισομορφισμός διότι η ϕ είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της $\psi : G \longrightarrow G, \quad \psi^{-1}(g) = g^{-1}$ συμπίπτει με την ϕ: $\psi = \phi$. Πράγματι:

$$(\phi \circ \psi)(g) = \phi(\psi(g)) = \phi(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g \quad \& \quad (\psi \circ \phi)(g) = \psi(\phi(g)) = \psi(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g$$

[4]Εδώ χρησιμοποιούμε ότι ένας ομομορφισμός στέλνει το ουδέτερο στοιχείο της πρώτης ομάδας στο ουδέτερο στοιχείο της δεύτερης ομάδας.

και άρα $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_G = \psi \circ \phi$, και άρα $\psi = \phi^{-1} = \phi$.

(5) Η απεικόνιση ϕ είναι καλά ορισμένη διότι:

$$[z]_6 = [w]_6 \implies 6 \mid z - w \implies 2 \mid z - w \implies [z]_2 = [w]_2 \implies \phi([z]_6) = \phi([w]_6)$$

και είναι ομομορφισμός διότι

$$\phi([z]_6 + [w]_6) = \phi([z + w]_6) = [z + w]_2 = [z]_2 + [w]_2 = \phi([z]_6) + \phi([w]_6)$$

Τέλος

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \big\{[z]_6 \in \mathbb{Z}_6 \mid \phi([z]_6) = [0]_2\big\} = \big\{[z]_6 \in \mathbb{Z}_6 \mid [z]_2 = [0]_2\big\} = \big\{[z]_6 \in \mathbb{Z}_6 \mid 2 \mid z\big\} = \big\{[0]_6, [2]_6, [4]_6\big\}$$

(6) Η απεικόνιση ϕ δεν είναι καλά ορισμένη διότι: $[0]_7 = [7]_7$, αλλά $\phi([0]_7) = [0]_2 \neq [1]_2 = [7]_2 = \phi([7]_7)$, και άρα δεν τίθεται θέμα αν η ϕ είναι ομομορφισμός. □

Υπενθυμίζουμε ότι ένας ομομορφισμός ομάδων $f\colon G \longrightarrow G'$ καλείται *τετριμμένος* αν, $\forall x \in G$: $f(x) = e'$.

Άσκηση 14. Δώστε παράδειγμα μη-τετριμμένου ομομορφισμού, η δικαιολογήστε γιατί δεν υπάρχει μη-τετριμμένος ομομορφισμός, $f\colon G \longrightarrow H$, όπου:

(1) $f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$.
(2) $f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$.
(3) $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$.
(4) $f : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}$.
(5) $f : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathsf{S}_3$.
(6) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathsf{S}_3$.
(7) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}$.
(8) $f : 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
(9) $f : \mathsf{D}_4 \longrightarrow \mathsf{S}_3$.
(10) $f : \mathsf{S}_3 \longrightarrow \mathsf{S}_4$.
(11) $f : \mathsf{S}_4 \longrightarrow \mathsf{S}_3$.
(12) $f : \mathcal{V}_4 \longrightarrow \mathcal{V}_4$.

Λύση. (1) Έστω $f\colon \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ ένας ομομορφισμός. Τότε $f([1]_{12}) = [x]_5$ για κάποιο στοιχείο $[x]_5 \in \mathbb{Z}_5$. Τότε επειδή οι πιθανές τάξεις του $[x]_5$ είναι 1 ή 5, και επειδή προφανώς η τάξη του $f([1]_{12})$ διαιρεί την τάξη του στοιχείου $[x]_5$, θα έχουμε

$$\mathsf{o}\big(f([1]_{12})\big) \mid \mathsf{o}([1]_{12}) \implies 1 \text{ ή } 5 \mid 12$$

Άρα η μόνη δυνατή επιλογή είναι $\mathsf{o}\big(f([1]_{12})\big) = 1$ και άρα $f([1]_{12}) = [0]_5$. Συνεπώς ο μόνος ομομορφισμός από το $\mathbb{Z}_{12}$ στο $\mathbb{Z}_5$ είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός.

(2) Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_4, \quad [k]_{12} \mapsto f([k]_{12}) = [3k]_4$$

Αν $[k]_{12} = [\lambda]_{12}$ τότε

$$\begin{aligned} 12 \mid k - \lambda \implies k - \lambda = 12r \implies k = 12r + \lambda \implies 3k = 3 \cdot 12r + 3\lambda &\implies 3k = 4(9r) + 3\lambda \\ &\implies [3k]_4 = [3\lambda]_4 \end{aligned}$$

Άρα η f είναι καλά ορισμένη και εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι και ομομορφισμός ομάδων.

(3) Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, \quad ([x]_2, [y]_4) \mapsto f([x]_2, [y]_4) = ([x]_2, [y]_5)$$

Τότε η f είναι ομομορφισμός ομάδων που δεν είναι ο τετριμμένος.

(4) Έστω $f\colon \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f([1]) = x$, ένας ομομορφισμός. Τότε

$$0 = f([0]) = f([3]) = 3f([1]) = 3x \implies 3x = 0 \implies x = 0$$

Επομένως δεν υπάρχει μη-τετριμμένος ομομορφισμός από το $\mathbb{Z}_3$ στο $\mathbb{Z}$.

(5) Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathsf{S}_3, \quad [1]_3 \mapsto f([1]_3) = (1\ 2\ 3)$$

και άρα $f([0]_3) = (1)$, $f([2]_3) = (1\ 3\ 2)$. Τότε η f είναι ομομορφισμός ομάδων.

(6) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "h=f\circ g"] \arrow[d, "g"'] & \mathsf{S}_3 \\ \mathbb{Z}_3 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

όπου η g στέλνει όλους τους ακέραιους $n \mapsto [n]_3$ και η f είναι ο ομομορφισμός που ορίσαμε στο (5). Τότε η h είναι ομομορφισμός ομάδων ως σύνθεση ομομορφισμών και ορίζεται ως εξής:

$$h(n) = \begin{cases} (1) & \text{αν } [n]_3 = [0]_3 \\ (1\ 2\ 3) & \text{αν } [n]_3 = [1]_3 \\ (1\ 3\ 2) & \text{αν } [n]_3 = [2]_3 \end{cases}$$

(7) Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f:\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z},\ \ (m,n) \mapsto f(m,n) = 2m$$

Τότε η f είναι ομομορφισμός ομάδων που δεν είναι ο τετριμμένος.

(8) Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f:\ 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ \ 2k \mapsto f(2k) = (2k, 0)$$

Τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f είναι ομομορφισμός ομάδων.

(9) Ορίζουμε την απεικόνιση $f\colon \mathsf{D}_4 \longrightarrow \mathsf{S}_3$ ως εξής:

$$\begin{cases} f(1) = (1) \\ f\big((1\ 2)(3\ 4)\big) = (1) \\ f\big((1\ 4)(2\ 3)\big) = (1) \\ f\big((1\ 3)(2\ 4)\big) = (1) \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} f\big((1\ 2\ 3\ 4)\big) = (1\ 2) \\ f\big((1\ 4\ 3\ 2)\big) = (1\ 2) \\ f\big((1\ 3)\big) = (1\ 2) \\ f\big((2\ 4)\big) = (1\ 2) \end{cases}$$

Τότε η f είναι ομομορφισμός ομάδων.

(10) Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f:\ \mathsf{S}_3 \longrightarrow \mathsf{S}_4,\quad \sigma \longmapsto f(\sigma) = \mu$$

όπου η μετάθεση μ ορίζεται ως εξής:

$$\mu(i) = \begin{cases} \sigma(i), & 1 \le i \le 3 \\ 4, & i = 4 \end{cases}$$

Τότε έπεται άμεσα ότι η f είναι ομομορφισμός ομάδων.

(11) Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f:\ \mathsf{S}_4 \longrightarrow \mathsf{S}_3,\ \ \sigma \longmapsto f(\sigma) = \begin{cases} (1), & \forall \sigma \in \mathsf{A}_4 \\ (1\ 2), & \forall \sigma \in \mathsf{S}_4 \setminus \mathsf{A}_4 \end{cases}$$

όπου A_4 είναι η εναλλάσσουσα υποομάδα. Τότε έχουμε ότι η f είναι ομομορφισμός ομάδων.

(12) Υπενθυμίζουμε ότι $\mathcal{V}_4 = \{e, a, b, c\}$, όπου $a^2 = b^2 = c^2$ και $c = ab$.

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f:\ \mathcal{V}_4 \longrightarrow \mathcal{V}_4,\ \ x \longmapsto f(x) = \begin{cases} e, & x = e \\ b, & x = a \\ a, & x = b \\ c, & x = c \end{cases}$$

Τότε έχουμε ότι η f είναι ομομορφισμός ομάδων. □

Άσκηση 15. Έστω G μια ομάδα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Η G είναι αβελιανή.
(2) Η απεικόνιση $f : G \longrightarrow G$, $f(x) = x^{-1}$ είναι ομομορφισμός.
(3) Η απεικόνιση $g : G \longrightarrow G$, $f(x) = x^2$ είναι ομομορφισμός.
(4) Η απεικόνιση $h : G \times G \longrightarrow G$, $h(x, y) = xy$ είναι ομομορφισμός.

Λύση. • (1) ⇒ (2) Υποθέτουμε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή και έστω $x, y \in G$. Τότε:

$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$$

και άρα η f είναι ομομορφισμός ομάδων.

(2) ⇒ (1) Έστω ότι η απεικόνιση f είναι ομομορφισμός ομάδων και έστω $x, y \in G$. Τότε:

$$\begin{cases} f(xy) = (xy)^{-1} \\ \\ f(x)f(y) = x^{-1}y^{-1} \end{cases} \Longrightarrow \quad (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \quad \Longrightarrow \quad (xy)^{-1} = (yx)^{-1} \quad \Longrightarrow \quad xy = yx$$

Συνεπώς η ομάδα G είναι αβελιανή.

• (1) ⇒ (3) Υποθέτουμε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή και έστω $x, y \in G$. Τότε:

$$g(xy) = (xy)^2 = xy \cdot xy = xx \cdot yy = x^2y^2 = g(x)g(y)$$

Άρα η g είναι ομομορφισμός ομάδων.

(3) ⇒ (1) Υποθέτουμε αντίστροφα ότι η απεικόνιση g είναι ομομορφισμός ομάδων και έστω $x, y \in G$. Τότε:

$$\begin{cases} g(xy) = (xy)^2 = xyxy \\ \\ g(x)g(y) = x^2y^2 \end{cases} \Longrightarrow \quad xyxy = x^2y^2 \quad \Longrightarrow \quad xyxy = xxyy \quad \Longrightarrow \quad yx = xy$$

Άρα η ομάδα G είναι αβελιανή.

• (1) ⇒ (4) Έστω ότι η ομάδα G είναι αβελιανή και έστω $x, y \in G$. Τότε:

$$h\big((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)\big) = h(x_1x_2, y_1y_2) = x_1x_2y_1y_2 = x_1y_1 \cdot x_2y_2 = h(x_1, y_1)h(x_2, y_2)$$

και άρα η h είναι ομομορφισμός ομάδων

(4) ⇒ (1) Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση h είναι ομομορφισμός ομάδων και έστω $x, y \in G$. Τότε έχουμε:

$$\begin{cases} h\big((x, e) \cdot (e, y)\big) = h(xe, ey) = h(x, y) = xy \\ \qquad\qquad \shortparallel \\ h\big((e, y) \cdot (x, e)\big) = h(e, y)h(x, e) = ey \cdot ex = yx \end{cases} \Longrightarrow \quad xy = yx$$

Επομένως η ομάδα G είναι αβελιανή. □

Άσκηση 16. (1) Πόσοι ομομορφισμοί ομάδων $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ υπάρχουν;
(2) Πόσοι μονομορφισμοί ομάδων $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ υπάρχουν;
(3) Πόσοι επιμορφισμοί ομάδων $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ υπάρχουν;
(4) Πόσοι ομομορφισμοί ομάδων $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ υπάρχουν;
(5) Πόσοι ομομορφισμοί ομάδων $\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ υπάρχουν;

Λύση. (1) Θα δείξουμε ότι μια απεικόνιση $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ είναι ομομορφισμός αν και μόνο αν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $f = f_k : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f_k(n) = nk$.

Καταρχήν για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η f_k είναι ομομορφισμός αφού

$$f_k(n_1 + n_2) = k(n_1 + n_2) = kn_1 + kn_2 = f_k(n_1) + f_k(n_2)$$

Έστω $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ένας ομομοφισμός ομάδων και θέτουμε $f(1) = k \in \mathbb{Z}$. Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Τότε έχουμε

$$\begin{cases} n > 0\colon \quad f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1) + \cdots + f(1) = n \cdot f(1) = nk = f_k(n) \\ \\ n = 0\colon \quad f(0) = 0 = 0 \cdot k = f_k(0) \\ \\ n < 0\colon \quad f(n) = f(-(-n)) = -f(-n) = -(-n)k = kn = f_k(n) \end{cases}$$

Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$f(n) = f(n \cdot 1) = nf(1) = nk \implies f = f_k$$

Επειδή $f_k = f_\lambda$ αν και μόνο αν $k = \lambda$ τότε υπάρχουν $|\mathbb{Z}|$ το πλήθος ομομομορφισμοί από το $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ και δίνονται από τους ομομοριφισμούς f_k με $k \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή η απεικόνιση

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \big\{\text{ομομορφισμοί} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\big\}, \quad k \longmapsto f_k$$

είναι 1-1 και επί.

(2) Έστω $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ένας μονομορφισμός. Άρα από το (1) έχουμε ότι $f = f_k, k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή $f_k(n) = kn$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε

$$f_k(n) = 0 \implies kn = 0 \implies k = 0 \text{ ή } n = 0$$

και άρα $k \neq 0$. Επίσης για $k \neq 0$ η f είναι μονομορφισμός. Προφανώς αν $k = 0$ τότε $\operatorname{Ker} f = \mathbb{Z}$ και άρα η f δεν είναι μονομορφισμός. Συνοψίζοντας έχουμε:

$$f\colon \text{ μονομορφισμός} \iff f = f_k,\ k \neq 0$$

(3) Για παράδειγμα έστω ο ομομορφισμός

$$\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ 1 \longmapsto \phi(1) = 5$$

Τότε για κάθε $z \in \mathbb{Z}$ έχουμε $\phi(z) = 5z$ και άρα η εικόνα της ϕ είναι

$$\phi(\mathbb{Z}) = 5\mathbb{Z}$$

Επομένως η εικόνα της ϕ δεν είναι όλο το $\mathbb{Z}$ και άρα η ϕ δεν είναι επί. Γενικά λοιπόν παρατηρούμε ότι αν ορίσουμε

$$\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ 1 \longmapsto \phi(1) = a$$

τότε $\phi(\mathbb{Z}) = a\mathbb{Z} = \langle a \rangle$. Για να είναι η ϕ επιμορφισμός θέλουμε να ισχύει η ισότητα: $\langle a \rangle = \mathbb{Z}$. Αυτό όμως συμβαίνει αν και μόνο αν το $a = \pm 1$. Συνεπώς έχουμε δύο επιμορφισμούς από το $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Z}$:

(α') $f_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ 1 \longmapsto 1$, δηλαδή $f_1(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

(β') $f_{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ 1 \longmapsto -1$, δηλαδή $f_{-1}(n) = -n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Παρατηρείστε από το (2) ότι αυτοί είναι και οι μόνοι ισομορφισμοί από το $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Z}$.

(4) Θεωρούμε τις παρακάτω δυο απεικονίσεις

$$f_1\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2,\ 1 \longmapsto f_1(1) = [0]$$

$$f_2\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2,\ 1 \longmapsto f_2(1) = [1]$$

Η απεικόνιση f_1 είναι ο τετριμμένος ομομορφισμός και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$f_2(n) = nf_2(1) = n[1] = [n] = \begin{cases} [0] \text{ αν } n \text{ άρτιος} \\ \\ [1] \text{ αν } n \text{ περιτός} \end{cases}$$

Συνεπώς έχουμε 2 ομομορφισμούς από το $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Z}_2$.

(5) Έστω $f\colon \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ ένας ομομορφισμός. Άρα $f([0]) = 0$ και $f([1]) = x$ για κάποιο $x \in \mathbb{Z}$. Τότε

$$f([0]) = f([2]) = f([1] + [1]) = f([1]) + f([1]) = x + x = 2x \implies 2x = 0 \implies x = 0$$

Επομένως $f([1]) = 0$ και άρα ο μοναδικός ομομορφισμός $\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ είναι ο μηδενικός. □

Άσκηση 17. Να δείξετε ότι:

(1) Υπάρχουν μονομορφισμοί ομάδων $f\colon G \longrightarrow G$ οι οποίοι δεν είναι ισομορφισμοί.
(2) Υπάρχουν επιμορφισμοί ομάδων $f\colon G \longrightarrow G$ οι οποίοι δεν είναι ισομορφισμοί.

Λύση. (1) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f_k : \ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \ \ n \ \longmapsto \ f_k(n) = kn$$

Όπως είδαμε στην Άσκηση 16, η απεικόνιση f_k είναι ένας ομομορφισμός ομάδων, και επιπλέον για $k \neq 0, 1, -1$ η f_k είναι μονομορφισμός αλλά όχι ισομορφισμός.

(2) Έστω η απεικόνιση

$$f : \ \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \ \ z \ \longmapsto \ f(z) = z^n$$

Είναι φανερό ότι η f είναι ομομορφισμός ομάδων.

Έστω $w = a + bi = r\cos\theta + ir\sin\theta \in \mathbb{C}^*$. Τότε υπάρχει ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \sqrt[n]{r}\big(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\big) \in \mathbb{C}^*$$

έτσι ώστε $f(z) = z^n = w$ και άρα η f είναι επιμορφισμός. Όμως

$$\operatorname{Ker} f = \{z \in \mathbb{C}^* \mid f(z) = 1\} = \mathsf{U}_n$$

δηλαδή η f δεν είναι μονομορφισμός και άρα έχουμε ότι η f δεν είναι ισομορφισμός. □

Άσκηση 18. Έστω H και K δύο κανονικές υποομάδες μιας ομάδας G.

(1) Να δείξετε ότι $HK = KH$ και το υποσύνολο HK είναι μια κανονική υποομάδα της G.
(2) Να δείξετε ότι η υποομάδα $H \cap K$ είναι κανονική υποομάδα της H και της K.
(3) Αν $H \cap K = \{e\}$, τότε να δείξετε ότι: $hk = kh$, $\forall h \in H$, $\forall k \in K$, και υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$HK \xrightarrow{\cong} H \times K$$

Λύση. (1) Παρατηρούμε ότι επειδή η H είναι κανονική υποομάδα της G, θα έχουμε $gH = Hg$, $\forall g \in G$. Ιδιαίτερα:

$$\forall k \in K : \ \ kH = Hk \ \implies \ KH = HK$$

Προφανώς $e = ee \in HK$ διότι $e \in H \cap K$. Έστω $h_1k_1, h_2k_2 \in HK$, όπου $h_1, h_2 \in H$ και $k_1, k_2 \in K$. Τότε

$$(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in h_1Kh_2^{-1} \subseteq h_1KH = h_1HK = HK$$

Επομένως η HK είναι υποομάδα της G.

Επιπλέον, επειδή $\forall g \in G$: $g^{-1}Hg = H$ και $g^{-1}Kg = K$, θα έχουμε:

$$g^{-1}HKg = g^{-1}(HK)g = g^{-1}(HeK)g = g^{-1}(Hgg^{-1}K)g = (g^{-1}Hg)(g^{-1}Kg) = HK$$

και επομένως η HK είναι κανονική υποομάδα της G.

(2) Έστω $h \in H$. Τότε για κάθε $g \in H \cap K$, το στοιχείο $h^{-1}gh$ ανήκει στην H διότι $g \in H$, και επίσης ανήκει και στην K διότι η K είναι κανονική υποομάδα της G και $g \in K$. Άρα $\forall h \in H$: $h^{-1}(H \cap K)h \in H \cap K$ και άρα η $H \cap K$ είναι κανονική υποομάδα της H.

Παρόμοια δείχνουμε ότι η $H \cap K$ είναι κανονική υποομάδα της K.

(3) Έστω $h \in H$ και $k \in K$. Τότε

$$H \trianglelefteq G \implies kh^{-1}k^{-1} \in H \quad \& \quad K \trianglelefteq G \implies hk^{-1}h^{-1} \in K$$

Τότε όμως θα έχουμε:

$$kh^{-1}k^{-1} \in H \ \ \& \ \ h \in H \implies hkh^{-1}k^{-1} \in H$$
$$hkh^{-1} \in K \ \ \& \ \ k^{-1} \in K \implies hkh^{-1}k^{-1} \in K$$

Άρα:

$$hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = \{e\} \implies hkh^{-1}k^{-1} = e \implies hk = kh$$

Ορίζουμε απεικόνιση

$$f: HK \longrightarrow H \times K, \quad f(hk) = (h,k)$$

η οποία είναι ομομορφισμός. Πράγματι: έστω $g_1, g_2 \in HK$. Τότε $g_1 = h_1k_1$ και $g_2 = h_2k_2$ για κάποια $h_1, h_2 \in H$ και $\forall k_1, k_2 \in K$. Χρησιμοποιώντας ότι $hk = kh$, $\forall h \in H, \forall k \in K$, θα έχουμε:

$$f(g_1g_2) = f(h_1k_1h_2k_2) = f(h_1h_2k_1k_2) = (h_1h_2, k_1k_2) = (h_1,k_1)(h_2,k_2) = f(h_1k_1)f(h_2k_2) = f(g_1)f(g_2)$$

Άρα η απεικόνιση f είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.

Προφανώς η f είναι επιμορφισμός, διότι αν $(h,k) \in H \times K$, τότε $f(hk) = (h,k)$.

Τέλος έστω $g_1 = h_1k_1$, $g_2 = h_2k_2 \in HK$. Τότε[5]

$$f(g_1) = f(g_2) \implies f(h_1k_1) = f(h_2k_2) \implies (h_1,k_1) = (h_2,k_2) \implies h_1 = h_2 \ \& \ k_1 = k_2 \implies$$
$$g_1 = h_1k_1 = h_2k_2 = g_2$$

Επομένως η f είναι «1-1» και άρα η f είναι ισομορφισμός ομάδων. $\square$

Άσκηση 19. Έστω G μια άπειρη ομάδα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Η G είναι κυκλική.
(2) Κάθε υποομάδα $H \neq \{e\}$ της G είναι ισόμορφη με την G.

Λύση. (1) ⇒ (2) Έστω ότι η G είναι κυκλική, δηλαδή υπάρχει στοιχείο $a \in G$ έτσι ώστε $G = \langle a \rangle$. Τότε οι υποομάδες της G είναι οι ακόλουθες:

$$\{e\}, \langle a \rangle, \langle a^2 \rangle, \langle a^3 \rangle, \cdots, \langle a^n \rangle, \cdots$$

Έστω $H \neq \{e\}$ υποομάδα της G. Τότε $H = \langle a^k \rangle$ για κάποιο $k \geq 1$ και άρα η H είναι άπειρη κυκλική. Όμως από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι κάθε δυο άπειρες κυκλικές ομάδες είναι ισομόρφες. Άρα έχουμε ότι $H \simeq G$.

Διαφορετικά θα δείξουμε κατευθείαν το ζητούμενο ισομορφισμό. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f: G = \langle a \rangle \longrightarrow H = \langle a^k \rangle, \quad a^m \mapsto f(a^m) = a^{mk} = (a^k)^m$$

Έχουμε

• <u>Ομομορφισμός Ομάδων</u>: Έστω $a^m, a^n \in G$. Τότε

$$f(a^m a^n) = f(a^{m+n}) = a^{(m+n)k} = a^{mk+nk} = a^{mk}a^{nk} = f(a^m)f(a^n)$$

και άρα η f είναι ομομορφισμός ομάδων.

• <u>Ένα προς ένα</u>: Αν $f(a^m) = f(a^n)$ τότε

$$a^{mk} = a^{nk} \implies a^{mk-nk} = e$$

Επειδή $\mathsf{o}(a) = \infty$ έπεται ότι $mk - nk = (m-n)k = 0$ και άρα $m = n$ ή $k = 0$. Αν $k = 0$ τότε έχουμε άτοπο διότι $H \neq \{e\}$. Συνεπώς έχουμε $a^m = a^n$, δηλαδή η f είναι ένα προς ένα.

• <u>Επί</u>: Τα στοιχεία της H είναι της μορφής $a^{k\lambda}$ με $\lambda \geq 1$. Τότε έχουμε το στοιχείο $a^\lambda \in G$ και $f(a^\lambda) = a^{\lambda k}$. Επομένως η f είναι επί.

Άρα δείξαμε πράγματι ότι: $H \simeq G$.

[5] Εναλλακτικά:

$$\mathsf{Ker}(f) = \big\{hk \in HK \mid f(hk) = e_{H\times K} = (e,e)\big\} = \big\{hk \in HK \mid (h,k) = (e,e)\big\} = \big\{hk \in HK \mid h = e = k\big\} = \{ee\} = \{e\}$$

Άρα η f είναι μονομορφισμός.

(2) $\Rightarrow$ (1) Επειδή η G είναι άπειρη υπάρχει στοιχείο $a \in G$ με $a \neq e$. Θεωρούμε τη κυκλική υποομάδα $H = \langle a \rangle$ της G που παράγεται από το στοιχείο a. Τότε από την υπόθεση μας έπεται ότι $H \simeq G$ και άρα η ομάδα G είναι κυκλική. $\square$