# Γραμμικη Αλγεβρα Ι

## Ασκησεις - Φυλλαδιο 6


Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης


Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

**11 - 1 - 2012**

**Άσκηση 1.** *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος και και υποθέτουμε ότι:* $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E} = n$. *Να δείξετε ότι ο $\mathcal{E}$ μπορεί να θεωρηθεί και ως $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος και τότε:* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E} = 2\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}$.

**Άσκηση 2.** *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n\}$$

*είναι βάση του $\mathcal{E}$.*

(1) *Να δείξετε ότι τότε το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i + \lambda\vec{e}_j, \cdots, \vec{e}_n\}$$

*είναι βάση του $\mathcal{E}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και $i \neq j$.*

(2) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α΄) *Το σύνολο*

$$\mathcal{D} = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n, \vec{e}_n + \vec{e}_1\}$$

*είναι βάση του $\mathcal{E}$.*

(β΄) *Το $n$ είναι περιττός.*

**Άσκηση 3.** *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$\vec{x} = (1, 1, 1, a), \quad \vec{y} = (1, 0, 1, b), \quad \vec{z} = (-2, 2, -2, c) \ \in \ \mathbb{R}^4$$

*όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

**Άσκηση 4.** *Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ και*

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\big\}$$

*Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$.*

**Άσκηση 5.** *Έστω $\vec{x} = (2, 1, 4, 3)$, $\vec{y} = (2, 1, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$. Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και να βρεθούν δυο διανύσματα $\vec{z}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\}$ να αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^4$.*

**Άσκηση 6.** *Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$ όπου*

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\big\}$$

$$\mathcal{W} = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\big\}$$

**Άσκηση 7.** *Έστω* $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}, \vec{e_5}\}$ *μια βάση του διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$. *Να βρεθεί η διάσταση* $\dim_{\mathbb{K}}\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4\rangle$ *του υπόχωρου ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$\vec{A}_1 = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 4\vec{e_3} + 3\vec{e_4} + \vec{e_5}\ ,$$
$$\vec{A}_2 = 2\vec{e_1} + 5\vec{e_2} - 3\vec{e_3} + 4\vec{e_4} + 8\vec{e_5}\ ,$$
$$\vec{A}_3 = 6\vec{e_1} + 17\vec{e_2} - 7\vec{e_3} + 10\vec{e_4} + 22\vec{e_5}\ ,$$
$$\vec{A}_4 = \vec{e_1} + 3\vec{e_2} - 3\vec{e_3} + 2\vec{e_4}.$$

**Άσκηση 8.** *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου* $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle$ *ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα*

$$\vec{u} = (0,1,2), \quad \vec{v} = (0,-1,2), \quad \vec{w} = (0,3,4)$$

*η οποία να επεκταθεί σε μια βάση του* $\mathbb{R}^3$.

**Άσκηση 9.** *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου* $\langle A, B, \Gamma, \Delta\rangle$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

*και ακολούθως να συμπληρωθεί σε μια βάση του* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

**Άσκηση 10.** *Έστω τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}_1 = (1,1,0,\cdots,0), \quad \vec{x}_2 = (0,1,1,0\cdots,0), \quad \cdots, \quad \vec{x}_n = (1,0\cdots,0,1)$$

*Να βρεθεί η διάσταση* $\dim_{\mathbb{R}}\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\rangle$ *του υπόχωρου ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

**Άσκηση 11.** *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου* $\langle P(t), Q(t), R(t)\rangle$ *ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα*

$$P(t) = t + t^2 + t^4, \quad Q(t) = t + 2t^2 - t^4, \quad R(t) = 2t + 6t^4$$

*η οποία στη συνέχεια να συμπληρωθεί σε μια βάση του* $\mathbb{R}_4[t]$.

**Άσκηση 12.** *Στον* $\mathbb{R}$-*διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}_1[t]$ *θεωρούμε τις ακόλουθες δυο βάσεις*

$$\mathcal{S} = \{t, t-3\} \quad \text{και} \quad \mathcal{T} = \{t-1, t+1\}.$$

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης* $M_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}$ *από την* $\mathcal{S}$ *στην* $\mathcal{T}$ *και ο πίνακας μετάβασης* $M_{\mathcal{T}}^{\mathcal{S}}$ *την* $\mathcal{T}$ *στην* $\mathcal{S}$.
(2) *Ποιες είναι οι συνιστώσες του διανύσματος* $P(t) = 5t + 1$ *ως προςαπό την* $\mathcal{S}$ *στην* $\mathcal{T}$ *τη βάση* $\mathcal{S}$ *και ως προς τη βάση* $\mathcal{T}$;

**Άσκηση 13.** *Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 9 \\ 1 & -\lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$$

*όπου* $\lambda \in \mathbb{R}$.