Γραμμικη Αλγεβρα Ι

Ασκησεις - Φυλλαδιο 8

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

8 - 2 - 2012

Άσκηση 1. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας και $\mathsf{adj}(A)$ ο συμπληρωματικός του A.*

(1) $\mathsf{adj}(A) = \mathbb{O} \iff \mathbf{r}(A) < n-1$.
(2) $\mathbf{r}(A) = n \implies \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = n$.
(3) $\mathbf{r}(A) < n-1 \implies \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 0$.
(4) $\mathbf{r}(A) = n-1 \implies \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 1$.

Άσκηση 2. *Έστω $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ και $h : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ γραμμικές απεικόνισεις μεταξύ $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, και $0 \neq k \in \mathbb{K}$. Να δείξετε ότι:*

(1) $\mathbf{r}(\kappa f) = \mathbf{r}(f)$.
(2) $|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \ \leq\ \mathbf{r}(f+g) \ \leq\ \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$.
(3) $\mathbf{r}(h \circ f) \ \leq\ \min\big\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(g)\big\}$.
(4) $\mathbf{r}(h \circ f) = \mathbf{r}(f) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(h) = \{\vec{0}\}$.
(5) $\mathbf{r}(h \circ f) = \mathbf{r}(h) \iff \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(h) = \mathcal{F}$.

Άσκηση 3. *Να βρεθούν οι βαθμίδες των πίνακων*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4. *Να λυθεί το σύστημα*

$$\begin{cases} x - 2y + z + w = 1 \\ x - 2y + z - w = -1 \\ x - 2y + z + 5w = 5 \end{cases}$$

Άσκηση 5. *Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες το γραμμικό σύστημα*

$$\begin{cases} \lambda x + (3\lambda + 4)y + 2(\lambda + 1)z = 0 \\ \lambda x + (4\lambda + 2)y + (\lambda + 4)z = 0 \\ 2x + (3\lambda + 4)y + 3\lambda z = 0 \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό, και ακολούθως να λυθεί.

Άσκηση 6. *Έστω (Σ) ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους. Αν $m < n$ να δειχθεί ότι το (Σ) δεν μπορεί να έχει μοναδική λύση.*

Άσκηση 7. *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 + x_7 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = -\lambda \end{cases}$$

Άσκηση 8. *Αν* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *να λυθεί το σύστημα:*

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = \alpha \\ x + \beta y + z = \beta \\ x + y + \gamma z = \gamma \end{cases}$$

Άσκηση 9. *Να λυθεί το σύστημα* $(\lambda \in \mathbb{R})$*:*

$$\begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y + \lambda z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = \lambda \end{cases}$$

Άσκηση 10. *Να λυθεί το σύστημα* $(\lambda \in \mathbb{R})$*:*

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

Άσκηση 11. *Πότε το σύστημα*

$$\begin{cases} x + 5y - 2z + 6w = \kappa \\ 4x - 3y + 7z + 12w = \lambda \\ 5x - 44y + 35z - 6w = \mu \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό;

Άσκηση 12. *Να βρεθούν οι τιμές του* $\kappa \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε το σύστημα :*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \kappa \end{cases}$$

(1) *να έχει λύση.*
(2) *να μην έχει λύση.*

Άσκηση 13. *Αφού υπολογίσετε την βαθμίδα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

να λύσετε το σύστημα:

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 13x_4 + 16x_5 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$