Γραμμικη Αλγεβρα Ι

Επιλυση Επιλεγμενων Ασκησεων Φυλλαδιου 3

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼ abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

6 - 12 - 2011

Άσκηση 1. *Έστω ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Να δειχθεί ότι ο* A *είναι αντιστρέψιμος και στη συνέχεια να υπολογισθεί ο* A^{-1}:

(1) *με χρήση του συμπληρωματικού adj$A$ του* A,

(2) *με τη μέθοδο στοιχειωδών μετασχηματισμών επί των γραμμών του πίνακα* $(A|I_3)$.

Λύση. *Καταρχήν, αφού*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

έπεται ότι ο πίνακας A *είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς, υπάρχει πίνακας* A^{-1} *έτσι ώστε* $A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$, *τον οποίο βρίσκουμε παρακάτω με δυο τρόπους.*

(1) *Υπολογίζουμε όλες τις ελάσσονες ορίζουσες του πίνακα* A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Άρα, έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}\,A = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2) *Έχουμε*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

και άρα έπεται ότι $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. □

Άσκηση 2. *Αν ένας από τους πίνακες $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος, τότε να δειχθεί ότι:*

$$|A \cdot B + I_n| = |B \cdot A + I_n|$$

Λύση. *Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε έχουμε*

$$\begin{aligned} |AB + I_n| &= |AB + AA^{-1}| \\ &= |A(B + A^{-1})| \\ &= |A||B + A^{-1}| \\ &= |B + A^{-1}||A| \\ &= |(B + A^{-1})A| \\ &= |BA + A^{-1}A| \\ &= |BA + I_n| \end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε το ζητούμενο αν ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος. □

Άσκηση 3. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του ακόλουθου $n \times n$ πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^{n-1} \\ 1 & \rho_2 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^{n-1} \\ 1 & \rho_3 & \rho_3^2 & \cdots & \rho_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n & \rho_n^2 & \cdots & \rho_n^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{(Ορίζουσα Vandermonde } n \text{ τάξης)}$$

Λύση. *Για $n = 2$ έχουμε την ορίζουσα*

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ 1 & \rho_2 \end{vmatrix} = \rho_2 - \rho_1$$

Στην άσκηση 4 του Φυλλαδίου 2 είχαμε αποδείξει την ορίζουσα Vandermonde για $n = 3$, δηλαδή

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 \\ 1 & \rho_2 & \rho_2^2 \\ 1 & \rho_3 & \rho_3^2 \end{vmatrix} = (\rho_2 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)$$

Θα αποδείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι

$$|A_n| = \prod_{i>j}^{1,n} (\rho_i - \rho_j) \tag{$*$}$$

Υπόθεση Επαγωγής: Έστω ότι ισχύει για $k = n - 1$, δηλαδή δεχόμαστε ότι:

$$|A_{n-1}| = \prod_{i>j}^{1,n-1} (\rho_i - \rho_j)$$

Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ *ισχύει για* $k = n$. *Έχουμε*

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^{n-1} \\ 1 & \rho_2 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n & \rho_n^2 & \cdots & \rho_n^{n-1} \end{vmatrix} \underset{\Sigma_n \to \Sigma_n - \rho_1 \Sigma_{n-1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 & \cdots & 0 \\ 1 & \rho_2 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^{n-2}(\rho_2 - \rho_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n & \rho_n^2 & \cdots & \rho_n^{n-2}(\rho_n - \rho_1) \end{vmatrix}$$

$$= \cdots \underset{\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \rho_1 \Sigma_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \rho_2 & \rho_2(\rho_2 - \rho_1) & \cdots & \rho_2^{n-2}(\rho_2 - \rho_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n & \rho_n(\rho_n - \rho_1) & \cdots & \rho_n^{n-2}(\rho_n - \rho_1) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \rho_1 \Sigma_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \rho_2 - \rho_1 & \rho_2(\rho_2 - \rho_1) & \cdots & \rho_2^{n-2}(\rho_2 - \rho_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n - \rho_1 & \rho_n(\rho_n - \rho_1) & \cdots & \rho_n^{n-2}(\rho_n - \rho_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \rho_2 - \rho_1 & \rho_2(\rho_2 - \rho_1) & \cdots & \rho_2^{n-2}(\rho_2 - \rho_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_n - \rho_1 & \rho_n(\rho_n - \rho_1) & \cdots & \rho_n^{n-2}(\rho_n - \rho_1) \end{vmatrix} = (\rho_2 - \rho_1) \cdots (\rho_n - \rho_1) \begin{vmatrix} 1 & \rho_2 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^{n-2} \\ 1 & \rho_3 & \rho_3^2 & \cdots & \rho_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n & \rho_n^2 & \cdots & \rho_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{ΕΠΑΓΩΓΗΣ}}{\overset{\text{ΥΠΟΘΕΣΗ}}{=\!=\!=}} (\rho_2 - \rho_1) \cdots (\rho_n - \rho_1) \prod_{i>j}^{2,n-1} (\rho_i - \rho_j) = \prod_{i>j}^{1,n} (\rho_i - \rho_j)$$

Επομένως, έχουμε $|A_n| = \prod_{i>j}^{1,n} (\rho_i - \rho_j)$, $\forall n \geq 1$. □

Άσκηση 4. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ a & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\ a & a & 1 & 2 & \cdots & n-4 & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & a & \cdots & 1 & 2 & 3 \\ a & a & a & a & \cdots & a & 1 & 2 \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Έχουμε*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ a & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & a & \cdots & a & 1 & 2 \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix} \underset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & a & \cdots & a & 1 & 2 \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_3}\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & a & \cdots & a & 1 & 2 \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\xlongequal{\Gamma_{n-1}\to\Gamma_{n-1}-\Gamma_n}\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a & 1 \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_n\to\Sigma_n-\Sigma_{n-1}}\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a & a \\ a & a & a & a & \cdots & a & a & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\Sigma_{n-1}\to\Sigma_{n-1}-\Sigma_{n-2}}\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a & a \\ a & a & a & a & \cdots & a & 0 & 1-a \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\xlongequal{\Sigma_2\to\Sigma_2-\Sigma_1}\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a & a \\ a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a & a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)(1-a)^{n-1} + (-1)^{n+1}aa^{n-1} = (1-a)^n + (-1)^{n+1}a^n\,. \qquad \square$$

Άσκηση 5. *Να δείξετε ότι για τον $n \times n$ πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ισχύει:

$$|A| = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

Λύση. *Έχουμε*

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_n \to \Gamma_n - \Gamma_{n-1}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_{n-1} \to \Gamma_{n-1} - \Gamma_{n-2}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} = \cdots \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \to \Sigma_1 + \Sigma_n \\ \Sigma_2 \to \Sigma_2 + \Sigma_n \\ =\!=\!=\!= \\ \vdots \\ \Sigma_{n-1} \to \Sigma_{n-1} + \Sigma_n \end{array} \begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1) \qquad \square$$

Άσκηση 6. *Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα A ο οποίος είναι της μορφής:*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbb{O} & D \end{pmatrix}$$

όπου: $B \in \mathsf{M}_{r\times r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathsf{M}_{r\times(n-r)}(\mathbb{K})$, $\mathbb{O} \in \mathsf{M}_{(n-r)\times r}(\mathbb{K})$, *και* $D \in \mathsf{M}_{(n-r)\times(n-r)}(\mathbb{K})$.
Να δείξετε ότι:

$$|A| = |B| \cdot |D|$$

Λύση.

- *Η Βασική Ιδέα της Απόδειξης είναι η ακόλουθη:*

Γενικά εκτελώντας σε έναν πίνακα Ω, ορισμένες εναλλαγές γραμμών ή/και προσθέτοντας πολλαπλάσια γραμμών σε άλλες μπορούμε να σχηματίσουμε έναν άνω τριγωνικό πίνακα Ω' με $\det \Omega = (-1)^{\epsilon} \det \Omega'$, όπου το $\epsilon = 1$, όταν το πλήθος από τις εναλλαγές των γραμμών είναι άρτιο και $\epsilon = -1$, όταν το πλήθος από τις εναλλαγές είναι περιττό.

Αυτό γίνεται με παρόμοιο τρόπο όπως κατά τη μετατροπή ενός πίνακα σε γ-κλιμακωτή μορφή, χωρίς όμως την απαίτηση το πρώτο στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής να ισούται με 1. Έτσι δεν χρειάζεται να πολλαπλασιάζουμε κάποια γραμμή με ένα μη μηδενικό στοιχείο, αφού τότε θα δεν θα ήταν εύκολο να παρακολουθούμε τις αλλαγές στην τιμή της ορίζουσας. Σε σχέση με την παρατήρηση αυτή σκεφτείτε ότι ένας γ-κλιμακωτός $n \times n$ πίνακας είναι ένας ειδικού τύπου άνω τριγωνικός πίνακας και αντίστροφα ένας άνω τριγωνικός πίνακας μπορεί να μετατραπεί εύκολα σε έναν γ-κλιμακωτό.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη τής συγκεκριμένης άσκησης.

Επί των πρώτων r γραμών τού πίνακα A εκτελούμε εναλλαγές γραμμών ή/και προσθέτουμε πολλαπλάσια γραμμών σε άλλες, κατά τέτοιον τρόπο ώστε στη θέση τού B να προκύψει ένας άνω τριγωνικός πίνακας B'. Έτσι από τον A έχει προκύψει ο

$$A' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ \mathbb{O} & D \end{pmatrix}.$$

Λόγω των εναλλαγών στις r γραμμές τού A έχουμε: $\det A' = (-1)^{\epsilon_1} \det A$ καθώς επίσης και $\det B' = (-1)^{\epsilon_1} \det B$, $\epsilon_1 = \pm 1$.

Επί των τελευταίων $n-r$ γραμών τού πίνακα A' εκτελούμε εναλλαγές γραμμών ή/και προσθέτουμε πολλαπλάσια γραμμών σε άλλες, κατά τέτοιον τρόπο ώστε στη θέση τού D να προκύψει ένας άνω τριγωνικός πίνακας D'. Έτσι από τον A' έχει προκύψει ο

$$A'' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ \mathbb{O} & D' \end{pmatrix}.$$

Λόγω των εναλλαγών στις $n-r$ γραμμές τού A' έχουμε: $\det A'' = (-1)^{\epsilon_2} \det A'$ καθώς επίσης και $\det D' = (-1)^{\epsilon_2} \det D$, $\epsilon_2 = \pm 1$.

Έχουμε $\det A = (-1)^{\epsilon_1}(-1)^{\epsilon_2} \det A''$, $\det B = (-1)^{\epsilon_1} \det B'$, $\det D = (-1)^{\epsilon_2} \det D'$.

Αλλά ο A'' είναι άνω τριγωνικός, αφού οι B' και D' είναι άνω τριγωνικοί. Επομένως, $\det A'' = \det B' \det C'$ (ως γινόμενο των στοιχείων τής κύριας διαγωνίου). Συνεπώς,

$$\det A = (-1)^{\epsilon_1}(-1)^{\epsilon_2} \det A'' = (-1)^{\epsilon_1}(-1)^{\epsilon_2} \det B' \det C' = \det B \det C. \qquad \square$$

Άσκηση 7. *Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός των μηδενικών συνιστωσών που μπορεί να έχει ένας 4×4 πίνακας, χωρίς όμως η ορίζουσά του να είναι ίση με μηδέν;*

Λύση. *Ο ελάχιστος αριθμός των μη μηδενικών συνιστωσών του, ώστε η ορίζουσα να μην ισούται με μηδέν, είναι τέσσερα και υλοποιείται από έναν διαγώνιο πίνακα όπου και τα τέσσερα στοιχεία τής κυρίας διαγωνίου είναι $\neq 0$. Μόνο τρία μη μηδενικά στοιχεία αναγκάζουν μία από τις τέσσερεις γραμμές τού πίνακα να αποτελείται πάντοτε μόνο από μηδενικά με συνέπεια η ορίζουσα να είναι ίση με μηδέν.*

Συνεπώς ο μέγιστος αριθμός των μηδενικών συνιστωσών του είναι $16 - 4 = 12$. $\square$

Άσκηση 8. *Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να έχει η ορίζουσα ενός πίνακα τής μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{K}),$$

όπου τα «$\star$» παίρνουν τις τιμές τους από το $\mathbb{K}$;

Λύση. *Θεωρουμε το πέμπτο στοιχείο τής τέταρτης γραμμής.*

Πρωτη Περιπτωση: *Αν το πέμπτο στοιχείο τής τέταρτης γραμμής είναι μηδέν, τότε ο πίνακας έχει την μορφή*

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα κατά τα στοιχεία τής πρώτης γραμμής βλέπουμε ότι οφείλουμε να υπολογίσουμε δύο ορίζουσες 4×4 πινάκων που και οι δυό τους έχουν τη μορφή

$$\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}.$$

Οι τελευταίοι πίνακες είναι κάτω τριγωνικοί με μηδενικό στοιχείο στην κύρια διαγώνιό τους και συνεπώς η ορίζουσά τους ισούται με μηδέν. Ώστε, $\det(A) = 0$.

Δευτερη Περιπτωση: *Αν το πέμπτο στοιχείο τής τέταρτης γραμμής δεν είναι μηδέν, τότε αφαιρώντας ένα κατάλληλο πολλαπλάσιο τής τέταρτης γραμμής από την πέμπτη, μπορούμε να μηδενίσουμε το πέμπτο στοιχείο τής πέμπτης γραμμής.*

Έτσι προκύπτει ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & 0 \end{pmatrix}$$

με $\det(B) = \det(A)$.

Στον B εναλλάσσουμε την πέμπτη με την τέταρτη γραμμή. Έτσι προκύπτει ένας πίνακας τής μορφής

$$C = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}.$$

Η $\det(C) = 0$, αφού η μορφή τού C είναι ίδια με τη μορφή τού A τής Πρώτης Περίπτωσης. Επιπλέον $\det(C) = -\det B$. Άρα $0 = \det(B) = \det(A)$. $\square$

Άσκηση 9. *Ας είναι $A = (a_{ij})$ ένας $n \times n$ πίνακας και A_{ij} το αλγεβρικό συμπλήρωμα τού στοιχείου a_{ij}. Να δειχθεί ότι, αν $i \neq r$, τότε*

$$a_{i1}A_{r1} + a_{i2}A_{r2} + \cdots + a_{in}A_{rn} = 0$$

και, αν $j \neq s$, τότε

$$a_{1j}A_{1s} + a_{2j}A_{2s} + \cdots + a_{nj}A_{ns} = 0.$$

Λύση. *Ας ονομάσουμε A' τον πίνακα που προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας την r-οστή γραμμή τού A από την i-οστή ($i \neq r$) γραμμή του. Η $\det A'$ ισούται με 0, αφού ο A' έχει δύο ίσες γραμμές (την i-οστή και την r-οστή). Αναπτύσσοντας την $\det A'$ κατά τα στοιχεία τής r-οστής γραμμής, τα οποία είναι τα $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ παίρνουμε:*

$$a_{i1}A_{r1} + a_{i2}A_{r2} + \cdots + a_{in}A_{rn} = \det A' = 0.$$

η απόδειξη τού άλλου τύπου είναι ανάλογη και εκτελείται με αντικαθιστώντας την s-οστή στήλη τού A με την j-οστή. $\square$

Άσκηση 10. *Να δειχθεί ότι η* $\det A_n$, *όπου* A_n *είναι ο* $n \times n$ *Fibonacci πίνακας:*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ισούται με τον n*-οστό όρο* a_n *τής ακολουθίας Fibonacci*

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots = \{a_n\}_{n=1}^{\infty},$$

ο οποίος ορίζεται μέσω του αναγωγικού τύπου: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \forall n \geq 3.$

Λύση. *Ο* 1×1 *πίνακας Fibonacci είναι ο* (1) *και η ορίζουσά του είναι η* $d_1 = 1$.
Ο 2×2 *πίνακας Fibonacci είναι ο* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *και η ορίζουσά του είναι η* $d_2 = 1 + 1 = 2$.
Ας είναι d_n *η ορίζουσα τού* $n \times n$ *πίνακα Fibonacci. Θα δείξουμε ότι για* $n \geq 3$, *είναι* $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$.
Ο 3×3 *πίνακας Fibonacci είναι ο* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *και η ορίζουσά του (αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία τής πρώτης στήλης) είναι η:*

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3 = d_1 + d_2.$$

Θεωρούμε τώρα τον $n \times n$ *Fibonacci πίνακα* A *και υπολογίζουμε την ορίζουσά του αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία τής* ***πρώτης στήλης****: Προφανώς,* $\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}$, *αφού τα υπόλοιπα στοιχεία τής πρώτης στήλης είναι ίσα με μηδέν. Το* $a_{11} = 1$ *και το συμπλήρωμά του* A_{11} *ισούται με* $(-1)^{1+1}d_{n-1}$ *(διαγράφοντας την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη τού* A *προκύπτει και πάλι πίνακας Fibonacci με μέγεθος* $(n-1) \times (n-1)$*). Το* $a_{21} = -1$ *και το συμπλήρωμά του* A_{21} *ισούται με* $(-1)^{2+1}D$, *όπου* D *είναι η ορίζουσα τού* $(n-1) \times (n-1)$ *πίνακα* A' *που προκύπτει διαγράφοντας την πρώτη στήλη και δεύτερη γραμμή τού* A, *δηλαδή τού πίνακα*

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Αλλά υπολογίζοντας την ορίζουσα D *τού* A' *αναπτύσσοντας τώρα κατά τα στοιχεία τής* ***πρώτης γραμμής*** *βλέπουμε ότι αυτή η* D *συμπίπτει με την ορίζουσα τού* $(n-2) \times (n-2)$ *Fibonacci πίνακα, δηλαδή με την ορίζουσα* d_{n-2}. *Έτσι τελικά έχουμε:*

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = (-1)^{1+1}d_{n-1} + (-1)(-1)^{2+1}d_{n-2} = d_{n-1} + d_{n-2}.$$

Άρα:

$$|A_n| = a_n, \quad \forall n \geq 1 \qquad \square$$