Γραμμικη Αλγεβρα Ι

Επιλυση Επιλεγμενων Ασκησεων Φυλλαδιου 4

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼ abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

21 - 12 - 2011

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ πάνω από το $\mathbb{R}$ και τα παρακάτω υποσύνολά του:*

$$\mathcal{V} = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \Big\}$$

και

$$\mathcal{W} = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & c+d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \Big\}$$

(1) *Να δείξετε ότι οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*
(2) *Να βρεθεί η μορφή των στοιχείων του υποχώρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.*

Λύση. (1) *Έχουμε*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \Big\} \\
&= \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \Big\} \\
&= \Big\{ a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \Big\} \\
&= \Big\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\rangle
\end{aligned}$$

δηλαδή ο $\mathcal{V}$ παράγεται από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρόμοια:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & c+d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \Big\} \\
&= \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \Big\} \\
&= \Big\{ c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \Big\} \\
&= \Big\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Big\rangle
\end{aligned}$$

δηλαδή ο $\mathcal{W}$ παράγεται από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(2) *Έστω* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, *δηλαδή* $A \in \mathcal{V}$ *και* $A \in \mathcal{W}$. *Τότε έχουμε*

$$\begin{cases} A \in \mathcal{V} & \Rightarrow a = 0 \ \text{ και } \ b = c \\ A \in \mathcal{W} & \Rightarrow a = 0 \ \text{ και } \ d = c + b \Rightarrow d = 2b \end{cases}$$

και άρα $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 2b \end{pmatrix}$. *Επομένως η περιγραφή του υποχώρου* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ *είναι η ακόλουθη:*

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \Big\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 2b \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Big\rangle \quad \square$$

Παρατήρηση 1. *Η Άσκηση* **1.** *θα μπορούσε να λυθεί και με χρήση του Ορισμού. Η παραπάνω λύση δείχνει επιπρόσθετα ότι τα σύνολα* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωροι οι οποίοι παράγονται από συγκεκριμένα διανύσμαστα.*

Άσκηση 2. *Στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ *ορίζουμε τις πράξεις:*

$$\oplus : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \ (x, y) \mapsto x \oplus y = xy$$

και

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \ (r, x) \mapsto r \odot x = x^r$$

(1) *Να δείξετε ότι η τριάδα* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *αποτελεί διανυσματικό χώρο υπεράνω του* $\mathbb{R}$.
(2) *Να βρεθούν όλοι οι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$.

Λύση. (1) *Έστω* $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ *και* $r, s \in \mathbb{R}$. *Τότε:*

(α') $(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x(y \oplus z) = x \oplus (y \oplus z)$.

(β') $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$.

(γ') *Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει ένα στοιχείο* $\mathfrak{o} \in \mathbb{R}^+$ *έτσι ώστε* $x \oplus \mathfrak{o} = x = \mathfrak{o} \oplus x$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^+$. *Άρα*

$$x \oplus \mathfrak{o} = x \iff x\mathfrak{o} = x \iff \mathfrak{o} = 1$$

διότι το $x \neq 0$. *Συνεπώς, το μηδενικό διάνυσμα είναι το στοιχείο* $\mathfrak{o} = 1$.

(δ') *Θεωρούμε στοιχείο* $x \in \mathbb{R}^+$. *Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει ένα στοιχείο* $y \in \mathbb{R}^+$ *έτσι ώστε:* $x \oplus y = \mathfrak{o} = y \oplus x$. *Επειδή από το προηγούμενο αξίωμα,* $\mathfrak{o} = 1$, *θα έχουμε:* $x \oplus y = 1 \Leftrightarrow xy = 1$ *και αφού* $x \in \mathbb{R}^+$ *έπεται ότι* $y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$. *Πράγματι, έχουμε*

$$x \oplus \frac{1}{x} = x\frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x}x = \frac{1}{x} \oplus x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$. *Άρα, το αντίθετο του διανύσματος* $x \in \mathbb{R}^+$ *ως προς την πρόσθεση* $\oplus$ *είναι το διάνυσμα* $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$.

(ε') $r \odot (x \oplus y) = r \odot (xy) = (xy)^r = x^r y^r = x^r \oplus y^r = (r \odot x) \oplus (r \odot y)$.

(ϝ') $(r + s) \odot x = x^{r+s} = x^r x^s = x^r \oplus x^s = (r \odot x) \oplus (s \odot x)$.

(ζ) $r \odot (s \odot x) = r \odot (x^s) = (x^s)^r = x^{sr} = (sr) \odot x$.

(η') $1 \odot x = x^1 = x$.

Επομένως, η τριάδα $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *αποτελεί διανυσματικό χώρο υπεράνω του* $\mathbb{R}$.

(2) *Γνωρίζουμε ότι το σύνολο* $\{1\}$ *και όλος ο χώρος* $\mathbb{R}^+$ *είναι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^+$. *Έστω* $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^+$ *ένας υπόχωρος του* $\mathbb{R}^+$ *έτσι ώστε* $\mathcal{V} \neq \{1\}$, *δηλαδή ο* $\mathcal{V}$ *δεν είναι ο μηδενικός υπόχωρος του* $\mathbb{R}^+$. *Άρα υπάρχει ένα* $x \in \mathcal{V}$ *με* $x \neq 1$. *Έστω* $k \in \mathbb{R}^+$. *Τότε έχουμε*

$$k = x^{\log_x k} = \log_x k \odot x \in \mathcal{V}$$

αφού $\log_x k \in \mathbb{R}$ *και* $x \in \mathcal{V}$. *Συνεπώς έχουμε ότι* $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathcal{V}$ *και άρα* $\mathcal{V} = \mathbb{R}^+$. *Επομένως οι μόνοι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *είναι το* $\{1\}$ *και όλος ο χώρος* $\mathbb{R}^+$.
$\square$

Παρατήρηση 2. *Οι διανυσματικοί χώροι* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *και* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *έχουν την ιδιότητα ότι οι μόνοι υπόχωροι τους είναι ο μηδενικός υπόχωρος και ο εαυτός τους. Αυτό δεν είναι τυχαίο. Όπως θα δείξουμε αργότερα, οι* $\mathbb{R}$*-διανυσματικοί χώροι* $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *και* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *είναι "ισόμορφοι" (αυτό έχει σαν συνέπεια ότι έχουν τις ίδιες δομικές ιδιότητες, και μια τέτοια δομική ιδιότητα είναι παράδειγμα η δομή των υποχώρων τους). Δηλαδή υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση* $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, *η οποία "διατηρεί τις πράξεις", με την έννοια ότι:*

$$f(x \oplus y) = f(x) + f(y), \quad \text{και} \quad f(r \odot x) = r \cdot f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \ \forall r \in \mathbb{R}$$

Μπορείτε να βρείτε μια τέτοια απεικόνιση;

Άσκηση 3. *Να λύσετε το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \\ -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 = -\lambda \end{cases}$$

Λύση. *Έχουμε*

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & -\lambda \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & -\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + 4\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -\lambda \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + 2\Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

και άρα καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \qquad - x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_4 - x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad x_5 = \frac{\lambda}{2} \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \lambda \end{cases}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) *Αν* $\lambda \neq 0$ *τότε έπεται ότι το σύστημα* (Σ) *είναι αδύνατο.*

(2) *Αν* $\lambda = 0$ *τότε έχουμε* $x_5 = 0$ *και άρα* $x_4 = 0$. *Ακόμα, από την πρώτη εξίσωση έχουμε* $x_1 = x_2 - x_3$. *Θέτουμε* $x_2 = \kappa$ *και* $x_3 = \nu$ *με* $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$. *Τότε έχουμε τη γενική λύση:*

$$\begin{cases} x_1 = \kappa - \nu \\ x_2 = \kappa \\ x_3 = \nu \qquad\qquad \kappa, \nu \in \mathbb{R}. \qquad \square \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 4. *Να λύσετε το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 - 2\lambda \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad\qquad = -2\lambda \\ \qquad\qquad\qquad x_4 - x_5 = 1 - \lambda \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

Λύση. *Έχουμε*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2-2\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{array}\right)$$

και άρα καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 - 2\lambda \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad\qquad = -2\lambda \\ \qquad\qquad\qquad x_4 - x_5 = 1 - \lambda \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 1 + \lambda \end{cases}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) *Αν* $\lambda \neq -1$ *τότε το σύστημα* (Σ) *είναι αδύνατο.*

(2) *Για* $\lambda = -1$ *έχουμε το σύστημα:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad\qquad = 2 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

Συνεπώς έχουμε ότι $x_2 = 2 - x_3$, $x_4 = 2 + x_5$ *και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε* $x_1 = -1 - x_3 + x_5$. *Θέτουμε* $x_3 = \nu$ *και* $x_5 = \kappa$ *με* $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$. *Τότε έχουμε τη γενική λύση:*

$$\begin{cases} x_1 = -1 - \nu + \kappa \\ x_2 = 2 - \nu \\ x_3 = \nu & \qquad \kappa, \nu \in \mathbb{R}. \\ x_4 = 2 + \kappa \\ x_5 = \nu \end{cases} \qquad \square$$

Άσκηση 5. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$ *και* $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ *δύο υπόχωροί του. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η ένωση* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ *των συνόλων* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος του* $\mathcal{E}$.
(2) *Είτε* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ *ή* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

Λύση. $(2) \Longrightarrow (1)$ *Αν* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, *τότε προφανώς* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W} = \mathcal{W}$, *και άρα η ένωση* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος διότι ο* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος. Παρόμοια αν* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, *τότε προφανώς* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W} = \mathcal{V}$, *και άρα η ένωση* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος διότι ο* $\mathcal{V}$ *είναι υπόχωρος.*

$(1) \Longrightarrow (2)$ *Έστω ότι η ένωση* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ *των συνόλων* $\mathcal{V}$ *και* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος του* $\mathcal{E}$.

(I) *Υποθέτουμε ότι* $\mathcal{V} \nsubseteq \mathcal{W}$. *Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα* $\vec{x} \in \mathcal{V}$ *το οποίο δεν ανήκει στον* $\mathcal{W}$: $\vec{x} \notin \mathcal{W}$. *Θα δείξουμε ότι* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

- *Θεωρούμε τυχόν διάνυσμα* $\vec{y} \in \mathcal{W}$. *Θα δείξουμε ότι* $\vec{y} \in \mathcal{V}$.

Πραγματικά τότε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ *ανήκουν προφανώς στην ένωση* $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$. *Επειδή το σύνολο* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος του* $\mathcal{E}$, *έπεται ότι το διάνυσμα* $\vec{x} + \vec{y}$ *ανήκει στην ένωση* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. *Επομένως*

$$\textit{είτε} \quad \text{(a)} \;\; \vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W} \quad \textit{ή} \quad \text{(b)} \;\; \vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}$$

(a) *Αν* $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W}$, *τότε επειδή* $\vec{y} \in \mathcal{W}$ *και το* $\mathcal{W}$ *είναι υπόχωρος, το διάνυσμα* $(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{y} = \vec{x}$ *θα ανήκει στον* $\mathcal{W}$. *Αυτό όμως είναι άτοπο διότι* $\vec{x} \notin \mathcal{W}$.
(b) *Άρα* $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}$. *Τότε επειδή* $\vec{x} \in \mathcal{V}$ *και το* $\mathcal{V}$ *είναι υπόχωρος, το διάνυσμα* $(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{x} = \vec{y}$ *θα ανήκει στον* $\mathcal{V}$. *Άρα δείξαμε ότι το διάνυσμα* $\vec{y}$ *του* $\mathcal{W}$ *είναι και διάνυσμα του* $\mathcal{V}$.

Επομένως δείξαμε ότι αν $\mathcal{V} \nsubseteq \mathcal{W}$, *τότε αναγκαστικά θα έχουμε* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$.

(II) *Αν* $\mathcal{W} \nsubseteq \mathcal{V}$, *τότε εργαζόμενοι παρόμοια δείχνουμε ότι τότε αναγκαστικά θα έχουμε* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. *Άρα δείξαμε ότι είτε* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ *ή* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. $\square$

Άσκηση 6. *Να εξεταστεί ποια από τα ακόλουθα υποσύνολα τού* $\mathbb{R}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^4$ *είναι* $\mathbb{R}$*-διανυσματικοί υπόχωροί του:*

(1) $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y, z = t\}$,
(2) $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$,
(3) $W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 1\}$,
(4) $W_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid xt = yz\}$.

Λύση. *Υπενθυμίζουμε ότι για να αποτελεί το υποσύνολο* W *ενός* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* V, *έναν υπόχωρο τού* V *πρέπει να πληροί τα ακόλουθα:*

(1) $W \neq \emptyset$,
(2) $\forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W \Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$,
(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{w} \in W \Rightarrow \lambda \cdot \vec{w} \in W$.

(α′) *Το* W_1 *αποτελείται από τα στοιχεία τού* $\mathbb{R}^4$ *τής μορφής* $(a,a,b,b), a,b \in \mathbb{R}$ *και επειδή το* $(0,0,0,0)$ *ανήκει στο* W_1*, αφού είναι αυτής τής μορφής, έπεται ότι* $W_1 \neq \emptyset$.

Αν $\vec{w}_1 \in W_1$ *και* $\vec{w}_2 \in W_1$*, τότε το* $\vec{w}_1 = (a,a,b,b)$ *και το* $\vec{w}_2 = (c,c,d,d)$*, όπου* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. *Έχουμε:*

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (a,a,b,b) + (c,c,d,d) = (a+c, a+c, b+d, b+d),$$

το οποίο έχει την κατάλληλη μορφή ώστε να ανήκει στο W_1.

Ανάλογα, αν $\lambda \in \mathbb{K}$ *και* $\vec{w} \in W_1$*, τότε το* $\vec{w} = (a,a,b,b), a,b \in \mathbb{R}$ *και έχουμε:*

$$\lambda \cdot \vec{w} = \lambda \cdot (a,a,b,b) = (\lambda a, \lambda a, \lambda b, \lambda b),$$

το οποίο έχει την κατάλληλη μορφή ώστε να ανήκει στο W_1.

(β′) *Το* W_2 *είναι* $\neq \emptyset$*, αφού οι συνιστώσες τού* $\vec{0} = (0,0,0,0)$ *ικανοποιούν την* $x+y+z+t=0$*, που έχει ως συνέπεια να ανήκει το* $\vec{0}$ *στο* W_2.

Αν $\vec{w}_1 = (a_1,b_1,c_1,d_1) \in W_2$ *και* $\vec{w}_2 = (a_2,b_2,c_2,d_2) \in W_2$*, τότε* $a_1+b_1+c_1+d_1 = 0$ *και* $a_2+b_2+c_2+d_2 = 0$. *Συνεπώς,* $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)+(d_1+d_2) = 0$ *και γι' αυτό το* $\vec{w}_1+\vec{w}_2 = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2)$ *ανήκει επίσης στο* W_2.

Αν $\lambda \in \mathbb{K}$ *και* $\vec{w} = (a,b,c,d) \in W_2$*, τότε* $a+b+c+d=0$. *Συνεπώς,* $\lambda a+\lambda b+\lambda c+\lambda d = \lambda 0 = 0$ *και γι' αυτό το* $\lambda\vec{w} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d)$ *ανήκει επίσης στο* W_2.

(γ′) *Το* W_3 ***δεν είναι*** *διανυσματικός υπόχωρος τού* $\mathbb{R}^4$*, μολονότι* $W_3 \neq \emptyset$*, αφού το* $(1,1,1,1)$ *είναι στοιχείο του. Πράγματι, αν ήταν διανυσματικός χώρος, τότε το μηδενικό στοιχείο τού* $\mathbb{R}^4$*, δηλαδή το* $\vec{0} = (0,0,0,0)$ *θα ανήκε στο* W_3. *Το τελευταίο δεν μπορεί να συμβαίνει, αφού για να ανήκει το* $\vec{0}$ *στο* W_3*, θα πρέπει, σύμφωνα με τον ορισμό τού* W_3*, η πρώτη συνιστώσα του, το* 0*, να ισούται με* 1.

(δ′) *Το* W_4 ***δεν είναι*** *διανυσματικός υπόχωρος τού* $\mathbb{R}^4$*, μολονότι* $W_4 \neq \emptyset$*, αφού οι συνιστώσες τού* $\vec{0} = (0,0,0,0)$ *ικανοποιούν την* $xt = yz$ *και συνεπώς* $\vec{0} \in W_4$. *Παρατηρούμε ότι το* $\vec{w}_1 = (0,0,2,4)$ *ανήκει στο* W_4*, αφού* $0 \cdot 4 = 0 \cdot 2$ *και το* $\vec{w}_2 = (4,1,8,2)$*, αφού* $4 \cdot 2 = 1 \cdot 8$. *Ωστόσο, το* $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (4,1,10,6)$ *δεν ανήκει στο* W_4*, αφού* $4 \cdot 6 \neq 1 \cdot 10$. □

Άσκηση 7. *Έστω* $\mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$ *το σύνολο των πραγματικών ακολουθιών. Στο* $\mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$ *ορίζουμε πρόσθεση*

$$\begin{aligned} + \ : \mathfrak{Seq}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{Seq}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{Seq}(\mathbb{R}), \\ ((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\longmapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

και βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$\cdot \ : \ \mathbb{R} \times \mathfrak{Seq}(\mathbb{R}) \ \longrightarrow \ \mathfrak{Seq}(\mathbb{R}), (\lambda, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \ \longmapsto \ \lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(1) *Να δειχθεί ότι η τριάδα* $(\mathfrak{Seq}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *αποτελεί* $\mathbb{R}$*-διανυσματικό χώρο.*

(2) *Ας είναι* $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ *το υποσύνολο τού* $\mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$ *που απαρτίζεται από τις ακολουθίες που συγκλίνουν σε κάποιον πραγματικό αριθμό. Ποιες γνωστές προτάσεις τού Απειροστικού Λογισμού εξασφαλίζουν ότι το* $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ *είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος τού* $\mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$*;*

Λύση. *(α′) Το πρώτο μέρος τής άσκησης μπορεί να προκύψει αμέσως από την:*

Πρόταση. *Έστω ότι* S *είναι ένα μη κενό σύνολο και ότι* $(V,+,\cdot)$ *είναι ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος. Το σύνολο* $\mathrm{Map}(S,V) := \{f : S \to V\}$ *των απεικονίσεων από το* S *στο* V *αποτελεί έναν* $\mathbb{K}$*-διανυσματικό χώρο με πράξεις την πρόσθεση:*

$$+ : \mathrm{Map}(S,V) \times \mathrm{Map}(S,V) \to \mathrm{Map}(S,V), (f,g) \mapsto f+g,$$

όπου $f+g$ *είναι η απεικόνιση που ορίζεται ως*

$$f+g : S \to V, s \mapsto (f+g)(s) := f(s) + g(s), \forall s \in S.$$

και βαθμωτό πολλαπλασιασμό

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathrm{Map}(S,V) \to \mathrm{Map}(S,V), (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f,$$

όπου $\lambda \cdot f$ είναι η απεικόνιση που ορίζεται ως

$$\lambda \cdot f : S \to V, s \mapsto (\lambda \cdot f)(s) := \lambda f(s), \forall s \in S. \qquad \square$$

Επιλέγοντας ως S το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και ως V τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}$, παίρνουμε $\mathrm{Map}(\mathbb{N},\mathbb{R}) = \mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$.
(β΄) Για να δείξουμε ότι $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός υπόχωρος πρέπει να εξασφαλίσουμε:

(1) *΄Οτι το $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ είναι μη κενό. Πράγματι το όριο κάθε σταθερής ακολουθίας πραγματικών αριθμών, δηλαδή κάθε ακολουθίας τής μορφής $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, a_i = c \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}$, είναι ο αριθμός c. Συνεπώς, οι σταθερές ακολουθίες ανήκουν στο $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ και γι΄ αυτό δεν είναι το κενό σύνολο.*
(2) *΄Οτι, αν $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ και $(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$, τότε και η ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$, δηλαδή ότι αν η ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $r_1 \in \mathbb{R}$ και η ακολουθία $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $r_2 \in \mathbb{R}$, τότε το άθροισμά τους $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}+(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $r_1+r_2 \in \mathbb{R}$. Συνεπώς το $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση τού $(\mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$.*
(3) *΄Οτι, αν $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε και η ακολουθία $\lambda \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$, δηλαδή ότι αν η ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $r \in \mathbb{R}$ και λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε το βαθμωτό γινόμενο $\lambda \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\lambda a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $\lambda r \in \mathbb{R}$. Συνεπώς το $\mathfrak{FinSeq}(\mathbb{R})$ είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίζεται στο $\mathfrak{Seq}(\mathbb{R})$.* $\square$

Άσκηση 8. *Να εξεταστεί ποιο από τα επόμενα υποσύνολα τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ των $n \times n$ πινάκων με συνιστώσες από το $\mathbb{R}$ αποτελεί $\mathbb{R}$-υποχώρο τού $M_{n\times n}(\mathbb{R})$:*

(1) *Το σύνολο των συμμετρικών των $n \times n$ πινάκων.*
(2) *Το σύνολο των αντιστρέψιμων των $n \times n$ πινάκων.*
(3) *Το σύνολο των μη αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων.*

Λύση. *(α΄) ΄Εστω S το σύνολο των συμμετρικών $n\times n$ πινάκων, δηλαδή των πινάκων $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ με $A = {}^tA$. Για να είναι το S ένας $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, θα πρέπει:*

Το S να μην είναι κενό. Πράγματι, ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας I_n είναι συμμετρικός και γι΄ αυτό ανήκει στο S. ΄Αρα, $S \neq \emptyset$.

Αν $A, B \in S$, τότε και $A + B \in S$. Πράγματι, ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB = A + B$. Συνεπώς, $A + B \in S$.

*Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $A \in S$, τότε και $\lambda \cdot A \in S$. Πράγματι, ${}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA = \lambda \cdot A$. Συνεπώς $\lambda \cdot A \in S$. Επομένως το S **είναι** ένας $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.*

(β΄) ΄Εστω T το σύνολο των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων. Για να είναι το T ένας $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, θα πρέπει:

Το T να μην είναι κενό. Πράγματι, ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας I_n είναι αντιστρέψιμος και γι΄ αυτό ανήκει στο T. ΄Αρα, $T \neq \emptyset$.

*Αν $A, B \in T$, τότε και $A+B \in T$. Αυτό όμως οφείλει να συμβαίνει για όλους τους αντιστρέψιμους πίνακες A, B. Επιλέγοντας ως A τον I_n και ως B τον $-\mathrm{I}_n$, ο οποίος προφανώς είναι αντιστρέψιμος, έχουμε: $\mathrm{I}_n + (-\mathrm{I}_n) = \mathbb{O}_n$. Αλλά ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας $\mathbb{O}_n$ δεν ανήκει στο T, αφού δεν είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς ο T **δεν είναι** $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.*

(γ΄) ΄Εστω Q το σύνολο των μη αντιστρέψιμων $n\times n$ πινάκων. Για να είναι το Q ένας $\mathbb{R}$ υπόχωρος τού $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, θα πρέπει:

Το Q να μην είναι κενό. Πράγματι, ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας $\mathbb{O}_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος και γι' αυτό ανήκει στο Q. Άρα, $Q \neq \emptyset$.

Τώρα θα διακρίνουμε περιπτώσεις.

*Για $n = 1$, ο χώρος $M_{1\times1}(\mathbb{R})$ ισούται με $\mathbb{R}$ και το $Q = \{0\}$ (κάθε μη μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμο). Προφανώς το $Q = \{0\}$ **είναι** $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού $\mathbb{R}$.*

*Για $n \geq 2$, αν $A, B \in Q$, τότε θα πρέπει και $A + B \in Q$. Αυτό όμως οφείλει να συμβαίνει για όλους τους μη αντιστρέψιμους πίνακες A, B. Επιλέγοντας ως $A = (a_{ij})$ τον πίνακα με $a_{11} = 1$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του ίσα με 0 έχουμε ότι $A \in Q$. Επιλέγοντας ως $B = (b_{ij})$ τον πίνακα με $b_{22} = \cdots = b_{nn} = 1$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του ίσα με 0 έχουμε ότι $B \in Q$. (Οι A, B δεν είναι αντιστρέψιμοι επιδή έχουν μηδενικές ορίζουσες.) Το άθροισμα $A + B$ ισούται με τον ταυτοτικό πίνακα ο οποίος προφανώς είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς $A + B = \mathrm{I}_n \notin Q$. Συνεπώς ο Q **δεν είναι** $\mathbb{R}$-υπόχωρος τού $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.* $\square$

Άσκηση 9. *Ας είναι*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ένας $n \times n$ πίνακας με συνιστώσες από ένα σώμα $\mathbb{K}$ και ας είναι

$$\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, 1 \leq j \leq n$$

η j-οστή στήλη τού πίνακα A.

Να δειχθεί ότι το $\mathbb{K}$-γραμμικό ομογενές σύστημα

$$A \cdot X = \mathbb{O}_n, \text{ όπου } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ και } \mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix},$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση, αν και μόνο αν, οι στήλες $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ τού A είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα το χώρου των στηλών $\mathbb{K}_n$.

Λύση. *Παρατηρούμε ότι η n-άδα $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ είναι λύση τού συστήματος:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nj}x_j & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

αν και μόνο αν,

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2, + \cdots + \lambda_j\vec{a}_j + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \mathbb{O}_n.$$

Επομένως το σύστημα έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική λύση $(0, 0, \ldots, 0)$, αν και μόνο αν, τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{K}_n$. □

Άσκηση 10. *Ας είναι A ένας $n \times n$ πίνακας με συνιστώσες από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο πίνακας A είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας.*
(2) *Οι στήλες τού πίνακα A είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου $\mathbb{K}_n$.*
(3) *Οι γραμμές τού πίνακα A είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου $\mathbb{K}^n$.*

Λύση. *Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ένας $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν, το ομογενές σύστημα $A \cdot X = \mathbb{O}_n$ έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική. Λαμβάνοντας υπόψη την αμέσως προηγουμενη άσκηση, διαπιστώνουμε την ισοδυναμία των (α') και (β').*

Επιπλέον είναι γνωστό αλλά και προφανές ότι ένας $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος , αν και μόνο αν, ο ανάστροφός του ${}^tA$ είναι αντιστρέψιμος. Σύμφωνα με την ισοδυναμία των (α') και (β'), που μόλις αποδείξαμε, ο ${}^tA$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν, οι στήλες του είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού χώρου $\mathbb{K}^n$. Αλλά οι στήλες τού ${}^tA$ είναι οι γραμμές τού A και γι' αυτό οι στήλες τού ${}^tA$ είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού $\mathbb{K}^n$, αν και μόνο αν, οι γραμμές τού A είναι $\mathbb{K}$-γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα τού $\mathbb{K}^n$. Αυτό αποδεικνύει την ισοδυναμία των (α') και (γ'). □

Άσκηση 11. *Να εξεταστεί αν τα διανύσματα $(3, 5, -4)$, $(-3, -2, 4)$, $(6, 1, -8)$ τού $\mathbb{R}^3$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα ή όχι.*

Λύση. *Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση είναι αρκετό να εξετάσουμε το, αν ο 3×3 πίνακας A, που έχει ως γραμμές (ή στήλες), τα τρία αυτά διανύσματα είναι αντιστρέψιμος ή όχι. Έστω λοιπόν ότι*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Επειδή η ορίζουσα $\det A = 0$, ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος και τα $(3, 5, -4)$, $(-3, -2, 4)$, $(6, 1, -8)$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένα. □