Γραμμικη Αλγεβρα I

Επιλυση Επιλεγμενων Ασκησεων Φυλλαδιου 8

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼ abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

10 - 2 - 2012

Άσκηση 1. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας και $\mathsf{adj}(A)$ ο συμπληρωματικός του A.*

(1) $\mathsf{adj}(A) = \mathbb{O} \iff \mathbf{r}(A) < n-1$.
(2) $\mathbf{r}(A) = n \implies \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = n$.
(3) $\mathbf{r}(A) < n-1 \implies \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 0$.
(4) $\mathbf{r}(A) = n-1 \implies \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 1$.

Λύση. (1) *Από τον ορισμό του συμπληρωματικού πίνακα* $\mathsf{adj}(A)$ *του* A *έχουμε ότι* $\mathsf{adj}(A) = \mathbb{O}$ *αν και μόνο αν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης* $n-1$ *είναι ίσες με* 0. *Επομένως έχουμε ισοδύναμα ότι* $\mathbf{r}(A) < n-1$ *αφού από βασικό Θεώρημα γνωρίζουμε ότι* $\mathbf{r}(A) < k$ *αν και μόνο αν υπάρχει ελάσσονα ορίζουσα τάξης* $k \neq 0$ *και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης μεγαλύτερης του* k *είναι ίσες με* 0.

(2) *Έστω* $\mathbf{r}(A) = n$. *Τότε* $|A| \neq 0$, *δηλαδή ο πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος. Όμως από την ακόλουθη σχέση:*

$$A \cdot \mathsf{adj}(A) = |A| \cdot I_n = \mathsf{adj}(A) \cdot A$$

έπεται ότι $|\mathsf{adj}(A)| \neq 0$ *και άρα ο* $\mathsf{adj}(A)$ *έχει μέγιστη βαθμίδα, δηλαδή:* $\mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = n$.

(3) *Αν* $\mathbf{r}(A) < n-1$ *τότε από το* (1) *έχουμε ότι* $\mathsf{adj}(A) = \mathbb{O}$ *και άρα* $\mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 0$.

(4) *Έστω* $\mathbf{r}(A) = n-1$. *Τότε* $|A| = 0$ *αφού* $\mathbf{r}(A) < n$. *Συνεπώς από τη σχέση* $A \cdot \mathsf{adj}(A) = |A| \cdot I_n = \mathsf{adj}(A) \cdot A$ *έχουμε*

$$A \cdot \mathsf{adj}(A) = 0 = \mathsf{adj}(A) \cdot A \qquad (*)$$

Θέτουμε $B = \mathsf{adj}(A)$ *και ορίζουμε τις παρακάτω απεικονίσεις:*

$$\mathbb{K}_n \xrightarrow{\ f_A\ } \mathbb{K}_n \xrightarrow{\ f_B\ } \mathbb{K}_n\ , \quad f_A(X) = A \cdot X \ \text{ και } \ f_B(X) = B \cdot X$$

Τότε

$$f_{B\cdot A}(X) = B \cdot A \cdot X = B \cdot (A \cdot X) = B \cdot (f_A(X)) = f_B(f_A(X)) = (f_B \circ f_A)(X)$$
$$\implies \ f_{B\cdot A} = f_B \circ f_A$$

και άρα από τη σχέση $(*)$ *έχουμε*

$$f_B \circ f_A = 0$$

Έστω $Y \in \operatorname{Im} f_A$. *Τότε* $Y = f_A(X)$ *και από την παραπάνω σχέση έχουμε* $f_B(f_A(X)) = 0$. *Άρα* $Y = f_A(X) \in \operatorname{Ker} f_B$ *και επομένως*

$$\operatorname{Im} f_A \subseteq \operatorname{Ker} f_B$$

Τότε από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}
& \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_A \leq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_B = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f_B \\
\implies\ & \mathbf{r}(A) \leq n - \mathbf{r}(B) \\
\implies\ & \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B) \leq n \\
\implies\ & n - 1 + \mathbf{r}(B) \leq n \\
\implies\ & \mathbf{r}(B) \leq 1
\end{aligned}$$

Έστω ότι $\mathbf{r}(B) = 0$. *Τότε* $B = \mathsf{adj}(A) = \mathbb{O}$ *και άρα από το* (1) *έχουμε* $\mathbf{r}(A) < n-1$, *που είναι άτοπο. Επομένως* $\mathbf{r}(B) = \mathbf{r}(\mathsf{adj}(A)) = 1$. □

Η ιδέα στην απόδειξη του (4) στην Άσκηση 1 είναι η χρήση του εξής γενικότερου αποτελέσματος που αναλύεται στην επόμενη Άσκηση:

Άσκηση 2. *Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\quad g \quad} \mathcal{F} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathcal{G}\,,$$

μεταξύ $\mathbb{K}$*-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Αν* $f \circ g = 0$*, τότε:*

(1) $\mathrm{Im}\, g \subseteq \mathrm{Ker}\, f$.
(2) $\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$.
(3) $\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$ *αν και μόνον αν* $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, f$.

Λύση. (1) *Έστω* $\vec{y} \in \mathrm{Im}\, g$*. Τότε* $\vec{y} = g(\vec{x})$ *και άρα χρησιμοποιώντας ότι* $f \circ g = 0$*, θα έχουμε* $f(\vec{y}) = f(g(\vec{x})) = \vec{0}$*. Άρα* $\vec{y} \in \mathrm{Ker}\, f$ *και επομένως*

$$\mathrm{Im}\, g \subseteq \mathrm{Ker}\, f$$

(2) *Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση έχουμε*

$$\begin{aligned} & \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, \mathrm{Im}\, g \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, \mathrm{Ker}\, f = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{F} - \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, \mathrm{Im}\, f \\ \Longrightarrow\ & \mathbf{r}(g) \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{F} - \mathbf{r}(f) \\ \Longrightarrow\ & \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{F} \end{aligned}$$

(3) *Παρατηρούμε ότι η ανισότητα στο* (2) *είναι ισότητα αν και μόνον αν* $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, \mathrm{Im}\, g = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, \mathrm{Ker}\, f$*. Επειδή από το* (1) *ισχύει* $\mathrm{Im}\, g \subseteq \mathrm{Ker}\, f$*, αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι:* $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, f$.

Άσκηση 3. *Έστω* $f, g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *και* $h : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *γραμμικές απεικόνισεις μεταξύ* $\mathbb{K}$*-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, και* $0 \neq k \in \mathbb{K}$*. Να δείξετε ότι:*

(1) $\mathbf{r}(\kappa f) = \mathbf{r}(f)$.
(2) $|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \ \leq\ \mathbf{r}(f+g) \ \leq\ \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$.
(3) $\mathbf{r}(h \circ f) \ \leq\ \min\big\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(h)\big\}$.

Λύση. (1) *Έστω* $\vec{y} \in \mathrm{Im}\, f$*. Τότε* $\vec{y} = f(\vec{x})$ *για κάποιο* $\vec{x} \in \mathcal{E}$*. Αφού* $k \neq 0$ *και* f *γραμμική έχουμε:*

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(1\vec{x}) = f(k\frac{1}{k}\vec{x}) = kf(\frac{1}{k}\vec{x}) \implies \vec{y} \in \mathrm{Im}\,(kf)$$

Άρα $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Im}\,(kf)$*. Αντίστροφα, αν* $\vec{y} \in \mathrm{Im}\, kf$ *τότε*

$$\vec{y} = (kf)(\vec{x}) = kf(\vec{x}) = f(k\vec{x}) \implies \vec{y} \in \mathrm{Im}\, f$$

Επομένως έχουμε $\mathrm{Im}\,(kf) \subseteq \mathrm{Im}\,(f)$ *και άρα* $\mathrm{Im}\,(kf) = \mathrm{Im}\, f$*. Τότε συνεπάγεται ότι*

$$\mathbf{r}(\kappa f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\,(kf) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f = \mathbf{r}(f)$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

(2) *Έστω* $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,(f+g)$*. Τότε* $\vec{y} = (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ *για κάποιο* $\vec{x} \in \mathcal{E}$ *και άρα* $\vec{y} \in \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$*. Άρα* $\mathrm{Im}\,(f+g) \subseteq \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$*. Τότε έχουμε:*

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}(f+g) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, g - \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) \\ \Rightarrow\ & \mathbf{r}(f+g) \leq \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) \\ \Rightarrow\ & \mathbf{r}(f+g) \leq \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \end{aligned} \qquad (*)$$

Από τη σχέση $(*)$ *έχουμε*

$$\begin{cases} \mathbf{r}(f) = \mathbf{r}((f+g) + (-g)) \leq \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(-g) = \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(g) \implies \mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g) \leq \mathbf{r}(f+g) \\ \mathbf{r}(g) = \mathbf{r}((f+g) + (-f)) \leq \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(-f) = \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(f) \implies \mathbf{r}(g) - \mathbf{r}(f) \leq \mathbf{r}(f+g) \end{cases}$$

και άρα

$$|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \leq \mathbf{r}(f+g) \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις $(*)$ *και* $(**)$ *έπεται ότι* $|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \ \leq\ \mathbf{r}(f+g) \ \leq\ \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$.

(3) *Αρχικά έχουμε* $\mathrm{Im}\,(h \circ f) \subseteq \mathrm{Im}\, h$ *και άρα*

$$\mathbf{r}(h \circ f) \leq \mathbf{r}(h) \qquad (1)$$

Επίσης επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα, ισχύει $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker}(h \circ f)$*, έπεται ότι* $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f \leq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(h \circ f)$*. Τότε από τις εξισώσεις των διαστάσεων για την* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ *και την σύνθεση* $h \circ f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G}$ *έχουμε:*

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \mathbf{r}(f) \\ \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(h \circ f) + \mathbf{r}(h \circ f) \end{cases} \implies \mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(h \circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(h \circ f) - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f \geq 0$$

$$\implies \mathbf{r}(f) \geq \mathbf{r}(h \circ f) \qquad (2)$$

Επομένως από τις σχέσεις (1) *και* (2) *έχουμε:* $\mathbf{r}(h \circ f) \ \leq \ \min\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(h)\}$. □

Άσκηση 4. *Να βρεθούν οι τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$*, για τις οποίες το γραμμικό σύστημα*

$$\begin{cases} \lambda x + (3\lambda + 4)y + 2(\lambda + 1)z = 0 \\ \lambda x + (4\lambda + 2)y + (\lambda + 4)z = 0 \\ 2x + (3\lambda + 4)y + 3\lambda z = 0 \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό, και ακολούθως να λυθεί.

Λύση. *Ο πίνακας του συστήματος είναι*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ \lambda & 4\lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 2 & 3\lambda + 4 & 3\lambda \end{pmatrix}$$

Έχουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ \lambda & 4\lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 2 & 3\lambda + 4 & 3\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\Sigma_1 \to \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3} \begin{vmatrix} 6\lambda + 6 & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ 6\lambda + 6 & 4\lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 6\lambda + 6 & 3\lambda + 4 & 3\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 6(\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ 1 & 4\lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 1 & 3\lambda + 4 & 3\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} 6(\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ 0 & \lambda - 2 & -\lambda + 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 6(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$$

(1) *Για* $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 2$ *έχουμε* $|A| \neq 0$ *και άρα το σύστημα είναι Cramer. Συνεπώς έχει μοναδική λύση τη μηδενική αφού είναι ομογενές.*

(2) *Έστω* $\lambda = -1$*. Τότε έχουμε το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Η βαθμίδα του πίνακα A *είναι* $\mathbf{r}(A) = 2$ *αφού*

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Συνεπώς το (Σ) *είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα:*

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x - 2y = -3z \end{cases} \implies x = y = z$$

Θέτουμε $z = t \in \mathbb{R}$*. Τότε έχουμε τη γενική λύση:*

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(3) *Έστω* $\lambda = 2$*. Τότε έχουμε το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} 2x + 10y + 6z = 0 \\ 2x + 10y + 6z = 0 \\ 2x + 10y + 6z = 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 \\ 2 & 10 & 6 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Προφανώς η βαθμίδα του πίνακα A *είναι* $\mathbf{r}(A) = 1$ *και λύνοντας έχουμε* $x = -5y - 3z$*. Θέτουμε* $y = \kappa$ *και* $z = \lambda$*. Τότε έχουμε τη γενική λύση:* $\{(-5\kappa - 3\lambda, \kappa, \lambda) \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}$. □

Άσκηση 5. *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:*

$$(\Sigma): \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 + x_7 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = -\lambda \end{cases}$$

Λύση. *Ο πίνακας του συστήματος (Σ) είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

Από την πρώτη, δεύτερη και έβδομη στήλη του πίνακα A έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Συνεπώς βρήκαμε μια ορίζουσα τάξης 3 διάφορη του 0 έτσι ώστε όλες οι ελάσσονες ορίζουσες ορίζουσες τάξης 4 που την περιβάλλουν είναι 0. Άρα η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathbf{r}(A) = 3$. Στην συνέχεια θα βρούμε την βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$. Έχουμε:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) *Αν $\lambda \neq 1$ τότε η βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$ είναι $\mathbf{r}(A|B) = 4$ διότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda) \neq 0$$

Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\mathbf{r}(A) = 3 \neq 4 = \mathbf{r}(A|B)$$

και επομένως το σύστημα (Σ) δεν είναι συμβιβαστό.

(2) *Έστω $\lambda = 1$. Τότε $\mathbf{r}(A|B) = 3$ αφού*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης 4 που την περιβάλλουν είναι 0. Συνεπώς έχουμε $\mathbf{r}(A) = 3 = \mathbf{r}(A|B)$ και άρα το (Σ) είναι συμβιβαστό. Έστω $\Lambda(\Sigma_0)$ ο υπόχωρος των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς (Σ_0). Τότε θα έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda(\Sigma_0) = 7 - \mathbf{r}(A) = 7 - 3 = 4$ παραμέτρους στις λύσεις. Θέτουμε $x_3 = p$, $x_4 = q$, $x_5 = r$ και $x_6 = s$ όπου $p, q, r, s \in \mathbb{R}$. Τότε το (Σ) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p - q - r + s \\ x_2 = 1 - r + s \\ x_1 + 2x_2 + x_7 = 1 - p - q - 2r + 2s \end{cases}$$

Τότε αντικαθιστώντας την $x_2 = 1 - r + s$ *στη πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι* $x_1 = -1 - p - q$ *και από την τελευταία εξίσωση έπεται ότι* $x_7 = 0$*. Επομένως η γενική λύση του συστήματος* (Σ) *είναι*

$$\begin{cases} x_1 = -1 - p - q \\ x_2 = 1 - r + s \\ x_3 = p \\ x_4 = q & \qquad p, q, r, s \in \mathbb{R} \qquad \square \\ x_5 = r \\ x_6 = s \\ x_7 = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 6. *Αν* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*, να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma): \begin{cases} \alpha x + y + z = \alpha \\ x + \beta y + z = \beta \\ x + y + \gamma z = \gamma \end{cases}$$

Λύση. *Ο πίνακας του συστήματος* (Σ) *είναι*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

και εύκολα υπολογίζουμε ότι η ορίζουσα τού πίνακα A *είναι* $|A| = \alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2$*. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις αναφορικά με τις τιμές που μπορεί να λάβει η βαθμίδα του πίνακα* A*.*

(1) $\underline{\mathbf{r}(A) = 3}$*: Αν η βαθμίδα του πίνακα* A *είναι ίση με* 3 *τότε ισοδύναμα έχουμε* $|A| \neq 0$*. Συνεπώς το σύστημα είναι Cramer και άρα έχουμε μοναδική λύση:*

$$x = \frac{\alpha\beta\gamma - 2\beta\gamma + \beta + \gamma - \alpha}{|A|}, \quad y = \frac{\alpha\beta\gamma - 2\alpha\gamma + \alpha + \gamma - \beta}{|A|}, \quad z = \frac{\alpha\beta\gamma - 2\alpha\beta + \alpha + \beta - \gamma}{|A|}$$

(2) $\underline{\mathbf{r}(A) = 1}$*: Ο πίνακας* A *έχει βαθμίδα ίση με* 1 *αν και μόνο αν*

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 1$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αρκεί να ελέγξουμε μόνο τις παραπάνω ορίζουσες ώστε $\mathbf{r}(A) = 1$*. Τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση* $x + y + z = 1$ *της οποίας η γενική λύση είναι:*

$$x = 1 - \kappa - \lambda, \;\; y = \kappa, \;\; z = \lambda, \; \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

(3) $\underline{\mathbf{r}(A) = 2}$*:*

(α') *Αν* $\alpha = \beta = \gamma = 1$ *τότε από το* (2) *η βαθμίδα του πίνακα* A *είναι* $\mathbf{r}(A) = 1$*, το οποίο είναι άτοπο.*

(β') *Έστω* $\alpha \neq 1, \ \beta \neq 1, \ \gamma \neq 1$ *και ας υποθέσουμε ότι το* (Σ) *είναι συμβιβαστό. Τότε* $\mathbf{r}(A|B) = 2 = \mathbf{r}(A)$ *όπου ο επαυξημένος πίνακας του* A *είναι*

$$(A|B) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \beta & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Τότε η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

αφού το $\beta \neq 1$*, και άρα όλες οι ελάσσονες ορίζουσες που την περιβάλλουν θα πρέπει να είναι ίσες με* 0*, δηλαδή:*

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix}$$

Υπολογίζοντας τις παραπάνω ορίζουσες έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2 = 0 \\ \alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma - 2\alpha\beta \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 2$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\alpha + \beta - \alpha\beta = 1 \implies (\alpha - 1)(1 - \beta) = 0 \implies \alpha = 1 \quad \acute{\eta} \quad \beta = 1$$

που είναι άτοπο από την υπόθεση μας. Άρα δεν γίνεται τα α, β και γ να είναι διάφορα του 1 όταν η βαθμίδα είναι $\mathbf{r}(A) = 2$.

(γ') Έστω $\alpha = 1,\ \beta \neq 1,\ \gamma \neq 1$. Τότε

$$|A| = \alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2 \xRightarrow{\alpha=1} (\beta - 1)(\gamma - 1) = 0$$

και άρα $\beta = 1$ ή $\gamma = 1$, που είναι άτοπο από την υπόθεση που ξεκινήσαμε. Επομένως υποθέτωντας ότι μόνο ένα από τα α, β και γ είναι μηδέν τότε καταλήξαμε σε άτοπο. Παρόμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν $\alpha \neq 1,\ \beta = 1,\ \gamma \neq 1$ ή $\alpha \neq 1,\ \beta \neq 1,\ \gamma = 1$.

(δ') Υποθέτουμε ότι μόνο δύο από τα α, β και γ είναι ίσα με 1. Έστω $\alpha \neq 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$. Τότε έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = \alpha \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 1 \neq 0$$

Άρα το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το εξής:

$$\begin{cases} \alpha x + y = \alpha - z \\ x + y = 1 - z \end{cases}$$

που είναι σύστημα Cramer ως προς τα x και y. Τότε εύκολα βρίσκουμε ότι η γενική λύση του συστήματος είναι: $x = 1,\ y = -\kappa,\ z = \kappa,\ \kappa \in \mathbb{R}$. Παρόμοια εργαζόμαστε αν $\alpha = 1,\ \beta \neq 1,\ \gamma = 1$ ή $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma \neq 1$. $\square$

Άσκηση 7. Να λυθεί το σύστημα $(\lambda \in \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

Λύση. Ο πίνακας του συστήματος (Σ) είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

(1) Για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ έχουμε $|A| \neq 0$ και άρα το σύστημα είναι Cramer. Συνεπώς έχουμε μοναδική λύση:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \cdots = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \cdots = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix}}{-(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \cdots = -\frac{4}{(\lambda + 1)}$$

(2) Έστω $\lambda = 1$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathsf{r}(A) = 2$ δίοτι υπάρχει μια ορίζουσα τάξης δύο διαφορετική του μηδενός:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Επίσης, η βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$ είναι $\mathsf{r}(A|B) = 2$ διότι

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Επομένως το σύστημα (Σ) είναι συμβιβαστό αφού $\mathsf{r}(A) = \mathsf{r}(A|B)$ και άρα το (Σ) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} x - y = 3 - z \\ x + y = 1 - z \end{cases} \implies 2x = 4 - 2z \implies x = 2 - z \implies y = -1$$

Θέτουμε $z = t \in \mathbb{R}$. Τότε η γενική λύση του (Σ) είναι

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$$

(3) Έστω $\lambda = -1$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

όπου παρατηρούμε από την πρώτη και τρίτη εξίσωση ότι το σύστημα είναι αδύνατο. $\square$

Άσκηση 8. Πότε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 5y - 2z + 6w = \kappa \\ 4x - 3y + 7z + 12w = \lambda \\ 5x - 44y + 35z - 6w = \mu \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό;

Λύση. Ο πίνακας και ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 \\ 4 & -3 & 7 & 12 \\ 5 & -44 & 35 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 & \kappa \\ 4 & -3 & 7 & 12 & \lambda \\ 5 & -44 & 35 & -6 & \mu \end{pmatrix}$$

Το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $\mathsf{r}(A) = \mathsf{r}(A|B)$. Η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathsf{r}(A) = 2$ δίοτι υπάρχει μια ορίζουσα τάξης δύο διαφορετική του μηδενός:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$$

και οι ορίζουσες τρίτης τάξης που την περιβάλλουν είναι μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 7 \\ 5 & -44 & 35 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & 12 \\ 5 & -44 & -6 \end{vmatrix}$$

Συνεπώς για να ισχύει $\mathsf{r}(A) = \mathsf{r}(A|B)$ *θα πρέπει*

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & \kappa \\ 4 & -3 & \lambda \\ 5 & -44 & \mu \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\mu + 3\lambda - 7\kappa = 0$$

Άρα το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $-\mu + 3\lambda - 7\kappa = 0$. $\square$