Γραμμικη Αλγεβρα I

Προχειρη Δοκιμασια 11

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

15 - 2 - 2012

Άσκηση 1. (1) **Τμήμα Α′**: *Έστω ότι ένας πίνακας C μπορεί να γραφεί ως $C = (A|B)$, όπου οι A και B είναι πίνακες με πλήθος γραμμών ίσο με το πλήθος γραμμών του C. Να δειχθεί ότι $\mathbf{r}(C) \leq \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B)$.*

(2) **Τμήμα Β′**: *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_2[t], \qquad f(x,y) = (x+y) + (x-y)t + (-x)t^2$$

και έστω οι ακόλουθες βάσεις των $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}_2[t]$ αντίστοιχα:

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1 = (1,0),\ \vec{e}_2 = (0,1)\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{B}_1' = \{\vec{e}_1{}' = (1,2),\ \vec{e}_2{}' = (2,1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{\vec{\epsilon}_1 = 1,\ \vec{\epsilon}_2 = t,\ \vec{\epsilon}_3 = t^2\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{B}_2' = \{\vec{\epsilon}_1{}' = 1,\ \vec{\epsilon}_2{}' = 1+t,\ \vec{\epsilon}_3' = 1+t+t^2\}$$

(α′) *Να βρεθούν οι πίνακες $A = M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)$ και $M^{\mathcal{B}_2'}_{\mathcal{B}_1'}(f)$ της f ως προς τα ζεύγη βάσεων $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ και $\{\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2'\}$.*

(β′) *Να προσδιοριστούν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q έτσι ώστε: $Q^{-1} \cdot A \cdot P = B$.*

Λύση. (1) **Τμήμα Α′** *Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n_1}(\mathbb{K})$ και $B \in \mathbb{M}_{m\times n_2}(\mathbb{K})$ όπου $\mathbb{K}$ ένα σώμα. Τότε ο πίνακας*

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n_1} & a_{1n_2} & \cdots & a_{1n_{n_2+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn_1} & a_{mn_2} & \cdots & a_{mn_{n_2+1}} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m\times(n_1+n_2)}(\mathbb{K})$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m\times n_1}(\mathbb{K}) \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} a_{1n_2} & \cdots & a_{1n_{n_2+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mn_2} & \cdots & a_{mn_{n_2+1}} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m\times n_2}(\mathbb{K})$$

Έστω

$$\mathcal{V}_1 = \Big\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n_1} \\ \vdots \\ a_{mn_1} \end{pmatrix} \Big\rangle$$

ο υπόχωρος που παράγεται από τις στήλες του πίνακα A και

$$\mathcal{V}_2 = \Big\langle \begin{pmatrix} a_{1n_2} \\ \vdots \\ a_{mn_2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n_{n_2+1}} \\ \vdots \\ a_{mn_{n_2+1}} \end{pmatrix} \Big\rangle$$

ο υπόχωρος που παράγεται από τις στήλες του πίνακα B. Επίσης, συμβολίζουμε με $\mathcal{V}$ τον υπόχωρο που παράγεται από τις στήλες του πίνακα C. Τότε $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ και άρα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(C) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) &= \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_2 - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \\ &= \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B) - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε πράγματι ότι $\mathbf{r}(C) \leq \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B)$. □

(2) **Τμήμα Β΄** *Έχουμε:*

$$\begin{aligned}f(\vec{e}_1) = f(1,0) &= (1+0) + (1-0)t + (-1)t^2 = 1 + t - t^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + (-1) \cdot t^2 \\ f(\vec{e}_2) = f(0,1) &= (0+1) + (0-1)t = 1 - t = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot t + 0 \cdot t^2\end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας της f ως προς το ζεύγος βάσεων $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ είναι

$$A = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned}f(\vec{e}_1^{\,\prime}) = f(1,2) &= (1+2) + (1-2)t + (-1)t^2 = 3 - t - t^2 = 4 \cdot 1 + 0 \cdot (1+t) + (-1) \cdot (1 + t + t^2) \\ f(\vec{e}_2^{\,\prime}) = f(2,1) &= (2+1) + (2-1)t + (-2)t^2 = 3 + t - 2t^2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (1+t) - 2 \cdot (1 + t + t^2)\end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας της f ως προς το ζεύγος βάσεων $\{\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2'\}$ είναι

$$B = M_{\mathcal{B}_1'}^{\mathcal{B}_2'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας P που ψάχνουμε είναι ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}_1$ στην $\mathcal{B}_1'$. Άρα:

$$\begin{cases} \vec{e}_1^{\,\prime} = (1,2) = 1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2^{\,\prime} = (2,1) = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 \end{cases} \Longrightarrow \quad P = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας Q είναι ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}_2$ στην $\mathcal{B}_2'$. Επομένως έχουμε:

$$\begin{cases} \vec{\epsilon}_1^{\,\prime} = 1 = 1\vec{\epsilon}_1 + 0\vec{\epsilon}_2 + 0\vec{\epsilon}_3 \\ \vec{\epsilon}_2^{\,\prime} = 1 + t = 1\vec{\epsilon}_1 + 1\vec{\epsilon}_2 + 0\vec{\epsilon}_3 \\ \vec{\epsilon}_3^{\,\prime} = 1 + t + t^2 = 1\vec{\epsilon}_1 + 1\vec{\epsilon}_2 + 1\vec{\epsilon}_3 \end{cases} \Longrightarrow \quad Q = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε ο πίνακας Q^{-1} είναι ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}_2'$ στην $\mathcal{B}_2$, δηλαδή:

$$\begin{cases} \vec{\epsilon}_1 = 1 = 1\vec{\epsilon}_1^{\,\prime} + 0\vec{\epsilon}_2^{\,\prime} + 0\vec{\epsilon}_3^{\,\prime} \\ \vec{\epsilon}_2 = t = -1\vec{\epsilon}_1^{\,\prime} + 1\vec{\epsilon}_2^{\,\prime} + 0\vec{\epsilon}_3^{\,\prime} \\ \vec{\epsilon}_3 = t^2 = 0\vec{\epsilon}_1^{\,\prime} - 1\vec{\epsilon}_2^{\,\prime} + 1\vec{\epsilon}_3^{\,\prime} \end{cases} \Longrightarrow \quad Q^{-1} = M_{\mathcal{B}_2'}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς προσδιορίσαμε αντιστρέψιμους πίνακες P και Q έτσι ώστε: $Q^{-1} \cdot A \cdot P = B$. □