Γραμμικη Αλγεβρα Ι

Προχειρη Δοκιμασια 1

Διδασκοντεσ: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθοι Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματοσ:

http://www.math.uoi.gr/∼abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

ή

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

16 - 11 - 2011

Άσκηση 1. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τον πίνακα*

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2011^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Να αποδείξετε ότι*

$$A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$$

2. *Να δείξετε ότι ο πίνακας $A(x)$ είναι αντιστρέψιμος.*

3. *Να υπολογισθεί ο πίνακας $A(x)^{-1}$.*

Λύση. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} 2011^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2011^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2011^x \cdot 2011^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2011^{(x+y)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= A(x+y) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$A(0) = \begin{pmatrix} 2011^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Επομένως, έχουμε

$$A(x)A(-x) = A(x + (-x)) = A(0) = I_3 = A(-x)A(x)$$

και άρα ο πίνακας $A(x)$ είναι αντιστρέψιμος με $A(x)^{-1} = A(-x)$. □