Γραμμικη Αλγεβρα I

Προχειρη Δοκιμασια 7

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθοι Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

11 - 1 - 2012

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*:*

$$\mathcal{V} = \Big\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ \Big| \ x_1 + x_4 = 0 \Big\}$$

$$\mathcal{W} = \Big\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ \Big| \ x_1 + x_2 = 0 \ \ \textit{και} \ \ x_2 - 2x_4 = 0 \Big\}$$

(1) *Να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων:* $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, *και* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.
(2) *Να συμπληρωθεί η βάση του* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ *που βρήκατε στο (1) σε μια βάση του* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Λύση. *Έχουμε*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \Big\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ \Big| \ x_1 + x_4 = 0 \Big\} \\
&= \Big\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ \Big| \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \Big\} \\
&= \Big\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ \Big| \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \Big\} \\
&= \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle
\end{aligned}$$

και αν

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Επομένως, το σύνολο $\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \}$ *αποτελεί βάση του* $\mathcal{V}$ *αφού δείξαμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον χώρο. Άρα* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 3$. *Για τον υπόχωρο* $\mathcal{W}$

έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; x_1 + x_2 = 0 \quad \textit{και} \quad x_2 - 2x_4 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -2x_4 & 2x_4 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x_4 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \langle \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle
\end{aligned}$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο $\{ \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί βάση του* $\mathcal{W}$. *Άρα* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = 2$. *Για τον υπόχωρο* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ *έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} \cap \mathcal{W} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; x_1 + x_4 = 0,\ x_1 + x_2 = 0 \quad \textit{και} \quad x_2 - 2x_4 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; x_1 = x_2 = x_4 = 0 \quad \textit{και} \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle
\end{aligned}$$

και άρα $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = 1$ *αφού το σύνολο* $\mathcal{C} = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \}$ *αποτελεί βάση του* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. *Για να συμπληρώσουμε το σύνολο* $\mathcal{C}$ *σε μια βάση του* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *χρειαζόμαστε άλλα τρια διανύσματα αφού* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$. *Επομένως, θεωρούμε το σύνολο*

$$\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$$

που είναι γραμμικά ανεξάρτητο και είναι (η κανονική) βάση του $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. $\square$