Γραμμικη Αλγεβρα Ι

Ασκησεις Προς Λυση - Φυλλαδιο **2**

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

23 - 11 - 2011

Άσκηση 1. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του* $n \times n$ *πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2. *Να δείξετε ότι για τον* $n \times n$ *πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ισχύει:

$$|A| = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

Άσκηση 3. *Να υπολογίσετε τις ορίζουσες των ακόλουθων πινάκων:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 8 \\ 5 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του* $n \times n$ *πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5. *Εάν* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 4$, *να υπολογισθεί η ορίζουσα*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 4a_3 - 2a_2 \\ b_1 & b_2 & 4b_3 - 2b_2 \\ \frac{1}{2}c_1 & \frac{1}{2}c_2 & 2c_3 - c_2 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 6. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του* $n \times n$ *πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^{n-1} \\ 1 & \rho_2 & \rho_2^2 & \cdots & \rho_2^{n-1} \\ 1 & \rho_3 & \rho_3^2 & \cdots & \rho_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho_n & \rho_n^2 & \cdots & \rho_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(ορίζουσα Vandermonde n *τάξης).*

Άσκηση 7. *Θεωρούμε τον* $n \times n$ *πίνακα* A *ο οποίος είναι της μορφής:*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbb{O} & D \end{pmatrix},$$

όπου $B \in M_{r\times r}(\mathbb{K})$, $C \in M_{r\times(n-r)}(\mathbb{K})$, $\mathbf{0} \in M_{(n-r)\times r}(\mathbb{K})$, $D \in M_{(n-r)\times(n-r)}(\mathbb{K})$.
Να δείξετε ότι:

$$|A| = |B| \cdot |D|$$

Άσκηση 8. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του* $n \times n$ *πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \beta \\ \beta & \alpha+\beta & \beta & \cdots & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha+\beta & \cdots & \beta & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha+\beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Άσκηση 9. *Έστω* A *ένας* $n \times n$ *πίνακας, για τον οποίο ισχύει:* ${}^tA = -A$. *Να δειχθεί ότι αν ο* n *είναι περιττός αριθμός, τότε* $|A| = 0$.

Άσκηση 10. *Να ευρεθούν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες δεύτερης τάξης και όλοι οι συμπαράγοντες τού πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 11. *Να ευρεθεί η ορίζουσα τού προηγούμενου πίνακα ως ανάπτυγμα*

(1) *κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής,*
(2) *κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης,*

(3) *κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής,*
(4) *κατά τα στοιχεία της δεύτερης στήλης,*
(5) *κατά τα στοιχεία της τρίτης γραμμής,*
(6) *κατά τα στοιχεία της τρίτης στήλης.*

Άσκηση 12. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να προσδιοριστούν οι αριθμοί Δ_{13} *και* A_{13}, Δ_{23} *και* A_{23}, Δ_{22} *και* A_{22}, *και* Δ_{21} *και* A_{21}.

Άσκηση 13. *Να προσδιοριστεί η ορίζουσα των επόμενων πινάκων*

(1) *αναπτύσσοντάς την ως προς τη στήλη ή τη γραμμή τής επιλογής σας.*
(2) *με χρήση κατάλληλων πράξεων επί των γραμμών ή των στηλών.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & 7 \\ 2 & a-3 & 4 \\ 5 & a+1 & a \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 14. *Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός των μηδενικών συνιστωσών που μπορεί να έχει ένας* 4×4 *πίνακας, χωρίς όμως η ορίζουσά του να είναι ίση με μηδέν;*