Γραμμικη Αλγεβρα Ι

Ασκησεις Προς Λυση - Φυλλαδιο 6

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

11 - 1 - 2012

Άσκηση 1. *Για τις διάφορες τιμές του* $\lambda \in \mathbb{R}$, *να βρεθεί η διάσταση του υπόχωρου* $\langle \vec{\varepsilon}_1,\, \vec{\varepsilon}_2,\, \vec{\varepsilon}_3 \rangle$ *όπου*

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1,2,3,4), \quad \vec{\varepsilon}_2 = (-2,1,\lambda,2), \quad \vec{\varepsilon}_3 = (3,1,1,2)$$

Άσκηση 2. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{x} = (1,-1,-1,1), \;\; \vec{y} = (1,-2,-2,1), \;\; \vec{z} = (0,1,1,0),$$

$$\vec{x_1} = (1,0,0,1), \;\; \vec{y_1} = (0,-1,-1,0)$$

Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου $\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$ *και να δείξετε ότι*

$$\langle \vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x_1},\, \vec{y_1} \rangle$$

Άσκηση 3. *Να βρεθεί η διάσταση* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$ *όπου*

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix} \;\; \middle| \;\; b,c,e \;\in\; \mathbb{R} \right\}$$

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τους υπόχωρους του* $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{V} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \}$$

$$\mathcal{W} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4,\; x_2 = 2x_3 \}$$

$$\mathcal{Z} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

$$\mathcal{U} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0,\; x_2 = 2x_4 \}$$

Να βρεθούν οι βάσεις των υπόχωρων $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, $\mathcal{Z} \cap \mathcal{U}$, *και* $\mathcal{V} + \mathcal{U}$.

Άσκηση 5. *Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα* ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda+3 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 6. *Να βρεθούν οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η βαθμίδα του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a+2 \\ a & 3 & b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

είναι 2.

Άσκηση 7. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου* $\langle P(t), Q(t), R(t) \rangle$ *όπου*

$$P(t) = 1 + t + t^3, \quad Q(t) = 2 + 2t + 2t^2 + t^4, \quad R(t) = 1 + t + 4t^2 - 3t^3 + 2t^4$$

η οποία στη συνέχεια να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}_4[t]$.

Άσκηση 8. *Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε τα πολυώνυμα*

$$P_1(t) = 3t^3 - t^2 - 4t + 6, \quad P_2(t) = t^3 + t^2 + 4t + 4, \quad P_3(t) = t^3 - 4t + \lambda$$

να είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}_3[t]$.

Άσκηση 9. *Να δείξετε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα:*

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{e}_1 = 1, \quad \vec{e}_1 = t, \quad \vec{e}_1 = t^2, \quad \vec{e}_1 = t^3 \right\}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \vec{\varepsilon}_1 = 1 + t^3, \quad \vec{\varepsilon}_1 = t, \quad \vec{\varepsilon}_1 = t + t^3, \quad \vec{\varepsilon}_1 = t^2 + t^3 \right\}$$

είναι βάσεις του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_3[t]$.

Στη συνέχεια να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης P από την βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{B}'$ και ο πίνακας μετάβασης Q από την βάση $\mathcal{B}'$ στην βάση $\mathcal{B}$. Να επαληθεύσετε ότι: $Q = P^{-1}$.