ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{ΤΜΗΜΑ } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ **1**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html

Παρασκευή 15 Οκτωβρίου 2021

Υπενθυμίζουμε ότι $\mathbb{K}$ συμβολίζει ένα σώμα, συνήθως ένα εκ των $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ συμβολίζεται με $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Για λόγους απλότητας, το σύνολο όλων τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ συμβολίζεται με $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$.

Ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας συμβολίζεται με O και ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας συμβολίζεται με I_n.

Άσκηση 1. *Να γράψετε αναλυτικά τον 6×6 πίνακα $A = (a_{ij})$ όπου $a_{ij} = \min\{i, j\} + i - j$.*

Άσκηση 2. *Δίνονται οι πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Να εκτελεστούν, όπου είναι δυνατόν, οι ακόλουθοι πολλαπλασιασμοί πινάκων:

$$A \cdot B, \quad B \cdot A, \quad A \cdot C, \quad C \cdot A, \quad B \cdot C, \quad C \cdot D, \quad D \cdot C, \quad C \cdot E, \quad E \cdot E$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ καλείται **αντιστρέψιμος**, αν υπάρχει $n \times n$ πίνακας B με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ έτσι ώστε $A\,B = I_n = B\,A$. Σ' αυτή την περίπτωση ο πίνακας B είναι μοναδικός, συμβολίζεται με A^{-1} και καλείται ο **αντίστροφος** του πίνακα A.

Άσκηση 3. *Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και*

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

να δειχθεί ότι οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι πίνακες A^{-1} και B^{-1}, και να δειχθεί ότι:

$$A\,B = B\,A$$

Άσκηση 4. *Έστω οι πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να προσδιοριστεί 3×3 πίνακας X, ο οποίος να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$A + 3X = 2(X - B)$$

Άσκηση 5. *Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$, θεωρούμε τους πίνακες:*

$$E_{ij} \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \qquad \textit{όπου} \qquad (E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1, & \textit{αν } k = i \ \& \ l = j \\ 0, & \textit{διαφορετικά} \end{cases}$$

Με άλλα λόγια ο πίνακας E_{ij} είναι ο $m \times n$ πίνακας ο οποίος έχει κάθε στοιχείο του ίσο με 0 εκτός από το στοιχείο του στη θέση (i, j) το οποίο είναι ίσο με 1.

(1) *Να δειχθεί ότι για κάθε $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ ισχύει ότι:*

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

(2) *Για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ να προσδιοριστούν οι πίνακες*

$$A \cdot E_{ij}, \qquad \textit{όπου} \qquad E_{ij} \in \mathsf{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$$

$$E_{ij} \cdot A, \qquad \textit{όπου} \qquad E_{ij} \in \mathsf{M}_{s\times m}(\mathbb{K})$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, τότε ορίζονται οι δυνάμεις A^n, $\forall n \geq 0$, του A επαγωγικά ως εξής:

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, \quad \cdots \quad A^{n+1} = A^n \cdot A$$

Ο πίνακας A^n καλείται η n-**οστή δύναμη** του A. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$A^n \cdot A^m = A^{n+m}, \qquad (A^n)^m = A^{nm}$$

Άσκηση 6. *Να εξετασθεί αν ισχύει η ακόλουθη σχέση στο σύνολο $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$:*

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Άσκηση 7. *Θεωρούμε τους πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \textit{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστεί ο πίνακας $A^{2018} \cdot B$.

Άσκηση 8. *Να υπολογιστεί η n-οστή δύναμη A^n του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το **ίχνος** $\mathsf{Tr}(A)$ ένός τετραγωνικού πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ορίζεται να είναι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του:

$$\mathsf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\mathsf{Tr}(A + B) = \mathsf{Tr}(A) + \mathsf{Tr}(B), \qquad \text{και} \qquad \mathsf{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathsf{Tr}(A)$$

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ο **ανάστροφος** ${}^tA$ ενός $m \times n$ πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ορίζεται να είναι ο $n \times m$ πίνακας ${}^tA \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, όπου:

$$({}^tA)_{ij} = (A)_{ji}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad \text{και} \quad {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$$

Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ καλείται **συμμετρικός** αν και μόνον αν ${}^tA = A$, δηλαδή ισχύει ότι: $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Άσκηση 9. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathsf{Tr}(A \cdot B) = \mathsf{Tr}(B \cdot A)$$

Ως εφαρμογή να δειχθεί ότι για κάθε αντιστρέψιμο $n \times n$ πίνακα P και κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει ότι:

$$\mathsf{Tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \mathsf{Tr}(A)$$

Άσκηση 10. *Να εξετασθεί αν για τυχόντες τετραγωνικούς πίνακες $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\mathsf{Tr}(A \cdot B) = \mathsf{Tr}(A)\mathsf{Tr}(B) \quad \textit{και} \quad \mathsf{Tr}({}^tA) = \mathsf{Tr}(A)$$

Άσκηση 11. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι:*

$$^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$$

Άσκηση 12. *Θεωρούμε τους $n \times 1$ πίνακες $A, B \in \mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$.*

(1) *Να δειχθεί ότι:*

$$^tA \cdot B = {}^tB \cdot A$$

(2) *Να δειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα ότι:*

$$A \cdot {}^tB \neq B \cdot {}^tA$$

(3) *Να δειχθεί ότι:*

$$\mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB) = {}^tA \cdot B$$

(4) *Να δειχθεί ότι:*

$$^tA \cdot A = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = O$$

(5) *Να δειχθεί ότι:*

$$A \cdot {}^tA = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = O$$

Άσκηση 13. (1) *Αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, να εξετασθεί αν ισχύει ότι: $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A$.*

(2) *Αν $A \in \mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, να δειχθεί ότι:*
  - (α') *Οι πίνακες $A \cdot {}^tA$ και ${}^tA \cdot A$ είναι συμμετρικοί.*
  - (β') $\mathsf{Tr}({}^tA \cdot A) = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tA)$.
  - (γ') *Ο αριθμός $\mathsf{Tr}({}^tA \cdot A)$ είναι μη-αρνητικός και: $\mathsf{Tr}({}^tA \cdot A) = 0 \iff A = O$.*

Άσκηση 14. *Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, να δειχθεί ότι $A^2 - 2A - 8I_2 = 0$. Επιπλέον να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο πίνακας A^{-1}.*

Άσκηση 15. *Έστω*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ένας 2×2 *πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι*[1]*:*

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O$$

Να συμπεράνετε ότι:

$$\text{ο πίνακας } A \text{ είναι αντιστρέψιμος} \quad \Longleftrightarrow \quad ad - bc \neq 0$$

και τότε:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\Big(- A + (a+d)I_2 \Big) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Άσκηση 16. *Έστω* $n \in \mathbb{N}$ *με* $n \geq 2$. *Ας είναι* $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K})$ *(αντιστοίχως* $\mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$*) το σύνολο των άνω (αντιστοίχως κάτω) τριγωνικών* $n \times n$ *πινάκων με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$.

Να δειχθεί ότι η τομή $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$ *των δύο αυτών συνόλων ισούται με το σύνολο των διαγωνίων πινάκων.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας A καλείται **ταυτοδύναμος** αν $A^2 = A$. Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

είναι ταυτοδύναμος.

Άσκηση 17. (1) *Να δειχθεί ότι αν ο πίνακας* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *είναι ταυτοδύναμος, τότε και ο πίνακας* $I_n - A$ *είναι ταυτοδύναμος.*

(2) *Να βρεθούν όλοι οι ταυτοδύναμοι και αντιστρέψιμοι πίνακες.*

(3) *Υποθέτουμε ότι για τους πίνακες (κατάλληλων μεγεθών)* A *και* B *ισχύει ότι:* $AB = A$ *και* $BA = B$. *Να δειχθεί ότι οι πίνακες* A *και* B *είναι ταυτοδύναμοι.*

Άσκηση 18. (1) *Αν ο* $n \times n$ *πίνακας* P *είναι ταυτοδύναμός, τότε να δειχθεί ότι:*

$$(2P - I_n)^2 = I_n$$

(2) *Αν για τον* $n \times n$ *πίνακα* A *ισχύει ότι* $A^2 = I_n$, *τότε να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$\frac{1}{2}\,(A + I_n)$$

είναι ταυτοδύναμος.

Άσκηση 19. *Δίνεται ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. *Να δείξετε ότι* $A^4 = I_3$ *και ακολούθως να δείξετε ότι ο* A *είναι αντιστρέψιμος. Στην συνέχεια να βρείτε τους πίνακες* A^{-1} *και* A^{2017}.

Άσκηση 20. *Έστω* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Βρείτε τον πίνακα* A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 21. *Για κάθε* $n \geq 1$, *να βρείτε την* n*-οστή δύναμη του πίνακα* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1] Ο αριθμός $a+d$ είναι το ίχνος $\mathsf{Tr}(A)$ του A, και ο αριθμός $ad-bc$ καλείται **ορίζουσα** του A και συμβολίζεται με $|A|$ ή $\mathsf{Det}(A)$.

Άσκηση 22. *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και ακολούθως να βρεθεί ο αντίστροφός του A^{-1}.

Άσκηση 23. *Έστω* A *και* B *δύο* $n \times n$ *πίνακες και υποθέτουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας* P *έτσι ώστε οι πίνακες* $P^{-1}AP$ *και* $P^{-1}BP$ *είναι διαγώνιοι. Να δειχθεί ότι:* $AB = BA$.

Υπενθυμίζουμε ότι μια **σχέση** $\mathcal{R}$ επί ενός συνόλου S είναι ένα υποσύνολο $\mathcal{R} \subseteq S \times S$ του καρτεσιανού γινομένου $S \times S$. Αν $s_1, s_2 \in S$, και $(s_1, s_2) \in \mathcal{R}$ θα γράφουμε: $s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2$, δηλαδή:

$$\forall s_1, s_2 \in S: \quad s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2 \quad \Longleftrightarrow \quad (s_1, s_2) \in \mathcal{R}$$

Μια σχέση $\mathcal{R}$ επί του συνόλου S καλείται **σχέση ισοδυναμίας** αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) $\forall s \in S$: $s \sim_{\mathcal{R}} s$. (Ανακλαστική ιδιότητα)

(2) $\forall s_1, s_2 \in S$: $s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2 \implies s_2 \sim_{\mathcal{R}} s_1$. (Συμμετρική ιδιότητα)

(3) $\forall s_1, s_2, s_3 \in S$: $\begin{cases} s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2 \\ s_2 \sim_{\mathcal{R}} s_3 \end{cases} \implies s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_3$. (Μεταβατική ιδιότητα)

Αν $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου S και δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχισης θα συμβολίζουμε την $\mathcal{R}$ με "$\sim$" και θα γράφουμε $s_1 \sim s_2$ αντί $s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2$.

Άσκηση 24. *Δύο* $n \times n$ *πίνακες* A *και* B *καλούνται όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* P *έτσι ώστε* $P^{-1}AP = B$. *Να δειχθεί ότι ορίζοντας*

$$\forall A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}): \quad A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad \text{οι πίνακες } A \text{ και } B \text{ είναι όμοιοι}$$

αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας «$\sim$*» στο σύνολο* $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *όλων των* $n \times n$ *πινάκων υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$.

Άσκηση 25. *Για κάθε* $n \geq 1$, *να βρεθεί η* n*-οστή δύναμη των πινάκων*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

όπου $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 26. *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Άσκηση 27. *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Άσκηση 28. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ 0 & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & x & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας A καλείται **μηδενοδύναμος** αν υπάρχει θετικός ακέραιος k έτσι ώστε: $A^k = 0$. Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι μηδενοδύναμος.

Άσκηση 29. *Έστω A και B δύο $n \times n$ πίνακες τέτοιοι ώστε ο πίνακας $I_n - (A \cdot B)^2$ να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι ο πίνακας $I_n - (B \cdot A)^2$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι*

$$\left(I_n - (B \cdot A)^2\right)^{-1} = I_n + B \cdot \left(I_n - (A \cdot B)^2\right)^{-1} \cdot A \cdot B \cdot A$$

Άσκηση 30. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = 0$, Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και*

$$A^{-1} = -A^4$$

Άσκηση 31. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Να δειχθεί ότι:*

$$\text{ο πίνακας } I_n + AB \text{ είναι αντιστρέψιμος} \iff \text{ο πίνακας } I_n + BA \text{ είναι αντιστρέψιμος}$$

Άσκηση 32. *Θεωρούμε τους $n \times n$ πίνακες A και B, και υποθέτουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει: $A + B = A \cdot B$. Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι: $A^{-1} + B^{-1} = I_n$.*

Άσκηση 33. *Έστω A, B δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες έτσι ώστε ο πίνακας $A + B^{-1}$ να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι ο πίνακας $A^{-1} + B$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι:*

$$(A^{-1} + B)^{-1} = A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}$$

Άσκηση 34. *Να ευρεθούν όλοι οι πίνακες που μετατίθενται με τους πίνακες τής μορφής:*

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 35. *Να προσδιοριστούν όλοι οι 2×2 ταυτοδύναμοι πίνακες.*

Άσκηση 36. *Να προσδιοριστούν όλοι οι 2×2 πίνακες A που υψούμενοι στο τετράγωνο είναι ίσοι με τον μηδενικό 2×2 πίνακα, δηλαδή όλοι οι 2×2 πίνακες A για τους οποίους ισχύει ότι $A^2 = O$.*