

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 3 Δεκεμβρίου 2021

Άσκηση 1. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Να δειχθεί ότι η f είναι γραμμική αν και μόνον αν, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}: f(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y})$.

Άσκηση 2. Έστω \mathbb{C} το σώμα των μιγαδικών αριθμών. Θα γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ όταν θεωρούμε το \mathbb{C} ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του \mathbb{C} και θα γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ όταν θεωρούμε το \mathbb{C} ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του \mathbb{R} .

(1) Η απεικόνιση:

$$f: \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{C}}, \quad f(z) = \bar{z}$$

δεν είναι γραμμική.

(2) Η απεικόνιση:

$$f: \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \quad f(z) = \bar{z}$$

είναι γραμμική.

[Παραπάνω \bar{z} συμβολίζει τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$, δηλαδή $\bar{z} = a - bi$.]

Παρατήρηση. Η παραπάνω Άσκηση δείχνει ότι η έννοια της γραμμικής απεικόνισης μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων εξαρτάται από το σώμα επί του οποίου είναι ορισμένοι οι διανυσματικοί χώροι.

Άσκηση 3. Να εξεταστεί ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές.

(1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2x - y, x, \lambda)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[x], f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (d - b) - (b - c)x + ax^3$.

(3) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y}, & \text{αν } y \neq 0 \\ 0, & \text{αν } y = 0 \end{cases}$

(4) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + 1, -y)$.

(5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}[x], f(r) = rx + 1$.

(6) $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - 1, b, c + d)$.

(7) $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{C}), f(z, w) = \begin{pmatrix} z & \bar{w} \\ 0 & z + iw \end{pmatrix}$, όπου οι εμπλεκόμενοι διανυσματικοί χώροι θεωρούνται υπεράνω του \mathbb{C} .

(8) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (ax + by + cz)(a, b, c)$, όπου $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(9) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (ax + by + cz)(x, y, z)$, όπου $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(10) $f: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, f(A) = |A|, g: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, g(A) = \text{Tr}(A)$.

Άσκηση 4. Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του \mathbb{R}^3

$$\vec{e}_1 = (0, 1, 1), \quad \vec{e}_2 = (1, 0, 1), \quad \vec{e}_3 = (1, 1, 0)$$

και τα διανύσματα του \mathbb{R}^2

$$\vec{y}_1 = (-2, 3), \quad \vec{y}_2 = (3, -1), \quad \vec{y}_3 = (4, 5)$$

Να βρεθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ έτσι ώστε:

$$\forall i = 1, 2, 3: \quad f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$$

Ακολουθώς να βρεθεί μια βάση για τον πυρήνα και μια βάση για την εικόνα της f .

Άσκηση 5. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\Phi: \mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{F}, \quad \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y} - f(\vec{x}))$$

είναι ισομορφισμός και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , όπου ο \mathcal{E} έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε οι υπόχωροι $\text{Ker}(f)$ και $\text{Im}(f)$ έχουν πεπερασμένη διάσταση και ισχύει η Θεμελιώδης Εξίσωση Διαστάσεων:

$$(1) \quad \boxed{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f)}$$

Η διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f)$ καλείται η **βαθμίδα** της f και συμβολίζεται με:

$$\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f)$$

Αν $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του \mathcal{E} , τότε:

$$\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n) \rangle$$

Προφανώς, όπως προκύπτει από την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων (1):

$$\mathbf{r}(f) \leq \min \{ \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}, \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} \}$$

Άσκηση 6. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η οποία ορίζεται από τη σχέση:

$$f(x, y, z) = (x + 2y, y - z, 2x + 4y)$$

Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και μια βάση της εικόνας $\text{Im}(f)$ της f . Ποιά είναι η βαθμίδα της f ;

Άσκηση 7. Να εξεταστεί αν η γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 8. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$D: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x], \quad D(P(x)) = P(x)'$$

η οποία στέλνει ένα πολυώνυμο $P(x)$ στην παράγωγο του $P(x)$, δηλαδή:

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$$

(1) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση D είναι γραμμική, και επάγει μια γραμμική απεικόνιση

$$D: \mathbb{K}_n[x] \rightarrow \mathbb{K}_n[x], \quad D(P(x)) = P(x)'$$

(2) Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα και την εικόνα της D όταν η D θεωρηθεί ως γραμμική απεικόνιση

$$D: \mathbb{K}_n[x] \rightarrow \mathbb{K}_n[x], \quad D(P(x)) = P(x)'$$

Ποιά είναι τότε η βαθμίδα της D ;

(3) Ναδειχθεί ότι $D^{n+1} = 0$.

Άσκηση 9. Έστω $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n$ ανά δύο διαφορετικά στοιχεία ενός σώματος \mathbb{K} . Ναδειχθεί ότι η απεικόνιση:

$$f: \mathbb{K}_n[x] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}, \quad f(P(x)) = (P(\rho_0), P(\rho_1), \dots, P(\rho_n))$$

είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 10. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

(1) Αν \mathcal{V} είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{E} , ναδειχθεί ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$\text{Ker}(f) = \mathcal{V}$$

(2) Αν \mathcal{W} είναι ένας υπόχωρος του \mathcal{E} , ναδειχθεί ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$\text{Im}(g) = \mathcal{W}$$

Άσκηση 11. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου ο \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος \mathcal{E} έχει πεπερασμένη διάσταση.

(1) Ναδείξετε ότι η f είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν η f στέλνει γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων σε γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα διανυσμάτων:

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\} : \text{γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο} \implies$$

$$f(\mathcal{C}) = \{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_k)\} : \text{γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο}$$

(2) Ναδείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν η f στέλνει τυχούσα βάση του \mathcal{E} σε βάση του \mathcal{E} :

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} : \text{βάση του } \mathcal{E} \implies f(\mathcal{B}) = \{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\} : \text{βάση του } \mathcal{E}$$

Υπεθυμίζουμε ότι αν \mathcal{E} και \mathcal{F} είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} , τότε το σύνολο

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \{f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \mid f: \text{γραμμική}\}$$

είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} με πράξεις, $\forall f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}), \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$f + g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}, \quad (f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \quad (\text{πρόσθεση})$$

$$\lambda \cdot f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}, \quad (\lambda \cdot f)(\vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \quad (\text{βαθμωτός πολλαπλασιασμός})$$

Αν $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε ορίζονται οι γραμμικές απεικονίσεις $f^n: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, $\forall n \geq 0$, όπου $f^0 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$, και $f^n(\vec{x}) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(\vec{x})$ (σύνθεση της f με τον εαυτό της n -φορές).

Τέλος, αν $f, f_1, f_2: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ και $g, g_1, g_2: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε:

$$f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2 \quad \text{και} \quad (f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g$$

Άσκηση 12. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση. Ναδειχθεί ότι:

$$\{\vec{0}\} \subseteq \text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(f^2) \subseteq \text{Ker}(f^3) \subseteq \dots \subseteq \text{Ker}(f^k) \subseteq \text{Ker}(f^{k+1}) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{E}$$

και υπάρχει $r \in \mathbb{N}$:

$$\text{Ker}(f^r) = \text{Ker}(f^{r+1}) = \text{Ker}(f^{r+2}) = \dots$$

Άσκηση 13. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση. Ναδειχθεί ότι:

$$\mathcal{E} \supseteq \text{Im}(f) \supseteq \text{Im}(f^2) \supseteq \text{Im}(f^3) \supseteq \dots \supseteq \text{Im}(f^k) \supseteq \text{Im}(f^{k+1}) \supseteq \dots \supseteq \{\vec{0}\}$$

και υπάρχει $s \in \mathbb{N}$:

$$\text{Im}(f^s) = \text{Im}(f^{s+1}) = \text{Im}(f^{s+2}) = \dots$$

Άσκηση 14. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του \mathcal{E} .

(1) Υποθέτουμε ότι:

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3, \quad \dots, \quad f(\vec{e}_{n-1}) = \vec{e}_n, \quad f(\vec{e}_n) = \vec{e}_1$$

Να δειχθεί ότι: $f^n = \text{Id}_{\mathcal{E}}$, η f είναι ισομορφισμός και να βρεθεί η αντίστροφή της.

(2) Υποθέτουμε ότι:

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3, \quad \dots, \quad f(\vec{e}_{n-1}) = \vec{e}_n, \quad f(\vec{e}_n) = \vec{0}$$

Να δειχθεί ότι: $f^n = 0$ και να βρεθεί η βαθμίδα της f .

Άσκηση 15. Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και την εικόνα $\text{Im}(f)$ της γραμμικής απεικόνισης:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + 2y, y - x, x + 2z)$$

Είναι η f ισομορφισμός. Αν η f είναι ισομορφισμός, να βρεθεί η f^{-1} .

Άσκηση 16. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση:

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z, w) = (x - z + 2w, -2x + y + 2z, y + 4w)$$

(1) Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και την εικόνα $\text{Im}(f)$ της f .

(2) Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $(1, 3, \kappa) \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \kappa = 5$.

(3) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $(1, a, 1, b) \in \text{Ker}(f)$;

Άσκηση 17. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + 3z, 3y + z, -x + 6y - z)$$

(1) Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και την εικόνα $\text{Im}(f)$ της f .

(2) Να βρεθούν οι υπόχωροι $f(\mathcal{V})$ και $f^{-1}(\mathcal{W})$, όπου:

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\} \quad \text{και} \quad \mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + z = 0\}$$

Άσκηση 18. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Έστω ότι $f^n = 0$ και $f^{n-1} \neq 0$. Αν $\vec{x} \in \mathcal{E}$, να δείξετε ότι $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$ αν και μόνο αν το σύνολο

$$\{\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{n-1}(\vec{x})\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Άσκηση 19. Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

και έστω η γραμμική απεικόνιση

$$f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM - MA$$

Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και την εικόνα $\text{Im}(f)$ της f .

Άσκηση 20. Θεωρούμε τη βάση

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1 = 1, \vec{e}_2 = t, \vec{e}_3 = t^2\}$$

του $\mathbb{R}_2[t]$ και τα διανύσματα

$$\vec{w}_1 = 1 + t, \vec{w}_2 = 3 - t^2, \vec{w}_3 = 4 + 2t - 3t^2$$

του $\mathbb{R}_2[t]$. Να προσδιορισθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_2[t]$ έτσι ώστε: $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$, $1 \leq i \leq 3$. Ακολουθώντας να εξετασθεί αν η f είναι ισομορφισμός. Αν η f δεν είναι ισομορφισμός να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και την εικόνα $\text{Im}(f)$ της f .

Άσκηση 21. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $\mathbf{r}(f) = r$, να δειχθεί ότι υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις $f_i: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, έτσι ώστε $\mathbf{r}(f_i) = 1$, $1 \leq i \leq r$, και:

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_r$$

Άσκηση 22. Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Αν $\mathbf{r}(A) = r$, να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες $A_1, A_2, \dots, A_r \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r, \quad \text{όπου} \quad \mathbf{r}(A_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq r$$

Άσκηση 23. Έστω $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου οι \mathbb{K} -διανυσματικοί χώροι \mathcal{E} και \mathcal{F} έχουν πεπερασμένη διάσταση, και $\lambda \in \mathbb{K}$. Να δειχθούν τα εξής:

(1)

$$\mathbf{r}(\lambda f) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \lambda = 0 \\ \mathbf{r}(f), & \text{αν } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

(2)

$$|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \leq \mathbf{r}(f + g) \leq \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$$

Άσκηση 24. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ και $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθεί ότι:

(1) $\mathbf{r}(g \circ f) \leq \mathbf{r}(g)$.

(2)

$$\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}} (\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g))$$

Ιδιαίτερα: $\mathbf{r}(g \circ f) \leq \mathbf{r}(f)$.

(3)

$$\mathbf{r}(g \circ f) \leq \min \{ \mathbf{r}(f), \mathbf{r}(g) \}$$

(4) Αν η g είναι μονομορφισμός, τότε: $\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g \circ f)$.

(5) Αν η f είναι επιμορφισμός, τότε: $\mathbf{r}(g) = \mathbf{r}(g \circ f)$.

Άσκηση 25. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Υποθέτουμε ότι $f^2 = 0$. Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(1) $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(f)$.

(2) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \leq 2 \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f)$.

(3) $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 2 \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f)$ αν και μόνον αν $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

(4) Αν η διάσταση του \mathcal{E} είναι περιττός αριθμός, τότε δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.

(5) Δεν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{2n+1}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος $(\Sigma): AX = 0$ να είναι το

$$\Lambda(\Sigma) = \{ AX \in \mathbb{K}_{2n+1} \mid X \in \mathbb{K}_{2n+1} \}$$

Άσκηση 26. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Ναδειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.
- (2) $\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f^2)$.
- (3) $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.
- (4) $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f^2)$.
- (5) $\mathcal{E} = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$.
- (6) $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{\vec{0}\}$.

Αν ισχύει μια από τις παραπάνω ισοδύναμες συνθήκες, τότε:

$$\mathcal{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$$

Παρατήρηση. (1) Τετριμμένο παράδειγμα απεικονίσεων οι οποίες ικανοποιούν τις ισοδύναμες συνθήκες της Άσκησης 26 είναι οι απεικονίσεις $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f^2 = f$. Αυτές οι απεικονίσεις καλούνται **προβολές**. Αν η απεικόνιση f είναι προβολή, τότε και η απεικόνιση $\text{Id}_{\mathcal{E}} - f$ είναι προβολή, και ισχύει:

$$\text{Ker}(\text{Id}_{\mathcal{E}} - f) = \text{Im}(f) \quad \text{και} \quad \text{Im}(\text{Id}_{\mathcal{E}} - f) = \text{Ker}(f)$$

Αν $m \leq n$, τότε η απεικόνιση

$$f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

είναι προβολή. Τα παραπάνω ναδειχθούν σαν Άσκηση.

- (2) Προσεκτική παρατήρηση της απόδειξης της παραπάνω Άσκησης δείχνει ότι αν εξαιρέσουμε τις συνθήκες (2) και (4), τότε το συμπέρασμα της Άσκησης 26 ισχύει και για διανυσματικούς χώρους άπειρης διάστασης.

Άσκηση 27. Έστω $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Ναδειχθεί ότι:

$$f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{E}} \quad \implies \quad g \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$$

Ισχύει το συμπέρασμα αν ο διανυσματικός χώρος έχει άπειρη διάσταση;

Το αποτέλεσμα της επόμενης άσκησης μας είναι γνωστό από τη θεωρία πινάκων και οριζουσών. Εδώ ζητείται να αποδειχθεί ο ισχυρισμός με χρήση γραμμικών απεικονίσεων.

Άσκηση 28. Θεωρούμε δύο $n \times n$ πίνακες A και B με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Ναδειχθεί, με χρήση γραμμικών απεικονίσεων, ότι:

$$AB = I_n \quad \implies \quad BA = I_n$$

Άσκηση 29. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Ναδειχθούν τα εξής:

- (1) Η f είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$g \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$$

- (2) Η f είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f \circ h = \text{Id}_{\mathcal{F}}$$

Άσκηση 30. Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ και θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f_A: \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_m, \quad f_A(X) = AX$$

Να δειχθεί ότι:

- (1) $\mathbf{r}(A) = n$ αν και μόνον αν η f_A είναι μονομορφισμός.
- (2) $\mathbf{r}(A) = m$ αν και μόνον αν η f_A είναι επιμορφισμός.
- (3) $\mathbf{r}(A) = n$ αν και μόνον αν υπάρχει πίνακας $B \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε: $BA = I_n$.
- (4) $\mathbf{r}(A) = m$ αν και μόνον αν υπάρχει πίνακας $C \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε: $AC = I_m$.

Άσκηση 31. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} .

- (1) Να δειχθεί ότι κάθε μη-μηδενική γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι μονομορφισμός.
- (2) Να δειχθεί ότι κάθε μη-μηδενική γραμμική απεικόνιση $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ είναι επιμορφισμός.

Άσκηση 32. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και έστω $\phi: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ μια μη-μηδενική γραμμική απεικόνιση. Να δειχθεί ότι υπάρχει βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ του \mathcal{E} έτσι ώστε:

$$\forall \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \in \mathcal{E}: \quad \phi(\vec{x}) = x_1$$

Άσκηση 33. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και έστω $\varphi, \psi: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Αν $\text{Ker}(\phi) = \text{Ker}(\psi)$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$\varphi = \lambda \psi$$

Άσκηση 34. Έστω $f, g: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ δύο μη μηδενικές γραμμικές απεικονίσεις, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Ορίζουμε μια νέα απεικόνιση ως εξής:

$$h: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{K}^2, \quad \vec{x} \longmapsto h(\vec{x}) := (f(\vec{x}), g(\vec{x}))$$

Να δείξετε τα ακόλουθα:

- (1) Η απεικόνιση h είναι γραμμική.
- (2) $\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$.
- (3) $\text{Im}(h) = \mathbb{K}^2$ (δηλαδή η h είναι επιμορφισμός) αν και μόνον αν $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = \mathcal{E}$.
- (4) Η h είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν $\mathcal{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(g)$.

Άσκηση 35. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και έστω $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε: $f^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}}$. Αν

$$\mathcal{E}_+ = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}_- = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$$

Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα \mathcal{E}_+ και \mathcal{E}_- είναι υπόχωροι του \mathcal{E} και:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$$

Να δοθεί παράδειγμα τέτοιας γραμμικής απεικόνισης.

Άσκηση 36. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathcal{E})$$

Άσκηση 37. Έστω \mathcal{E} ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$$

Ο \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ καλείται ο **δυϊκός χώρος** του \mathcal{E} και συμβολίζεται με:

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K}) \quad \text{ή} \quad \widehat{\mathcal{E}} = \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$$

τα δε στοιχεία του, δηλαδή οι γραμμικές απεικονίσεις $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$ καλούνται **γραμμικές μορφές**.

Έτσι για κάθε \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο \mathcal{E} ορίζεται ο δυϊκός του \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος \mathcal{E}^* . Ιδιαίτερα ορίζεται ο δυϊκός χώρος $\mathcal{E}^{**} = (\mathcal{E}^*)^*$ του δυϊκού χώρου \mathcal{E}^* , ο οποίος καλείται ο **διπλά δυϊκός χώρος** του \mathcal{E} . Η βάση

$$\mathcal{B}^* = \{\vartheta^1, \vartheta^2, \dots, \vartheta^n\}$$

του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου $\widehat{\mathcal{E}}$ που κατασκευάστηκε στην παραπάνω Άσκηση καλείται η **δυϊκή βάση** της βάσης $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ του \mathcal{E} .

Άσκηση 38. Έστω \mathcal{E} ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος \mathbb{K} . Τότε η απεικόνιση

$$\Omega: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{**}, \quad \vec{x} \rightarrow \Omega(\vec{x}): \mathcal{E}^* \rightarrow \mathbb{K}, \quad \Omega(\vec{x})(f) = f(\vec{x})$$

είναι ένας ισομορφισμός.