

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 17 Δεκεμβρίου 2021

Άσκηση 1. Να εξετασθεί αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση:

(1) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε:

$$\text{Ker}(f) = \langle (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle = \text{Im}(f)$$

(2) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε:

$$\text{Ker}(f) = \langle (1, 1, 0), (1, 1, 1) \rangle \quad \text{και} \quad \text{Im}(f) = \langle (1, 0, 0, 0), (2, 0, 1, 0) \rangle$$

(3) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε:

$$\text{Im}(f) = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

και ο πίνακας της f ως προς κατάλληλες βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{B}' του \mathbb{R}^3 να είναι ο

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (y + z, x + z, y + x)$$

(1) Να βρεθεί ο πίνακας $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ της f , όπου

$$\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \}$$

είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 .

(2) Να βρεθεί ο πίνακας $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ της f , όπου \mathcal{C} είναι η ακόλουθη βάση του \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{C} = \{ \vec{c}_1 = (1, 1, 1), \vec{c}_2 = (1, -1, 0), \vec{c}_3 = (1, 1, -2) \}$$

(3) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = B$$

Άσκηση 3. Να δείχθει ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

έτσι ώστε:

$$f(0, 1, 1) = (0, 1, 3), \quad f(1, 0, 1) = (5, 4, 3), \quad f(1, 1, 0) = (2, 0, 0)$$

Ακολουθώντας:

(1) Να βρεθεί ο πίνακας $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ της f ως προς τη βάση \mathcal{B} , όπου

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 .

(2) Να βρεθεί ο πίνακας $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ της f ως προς τη βάση \mathcal{C} , όπου \mathcal{C} είναι η βάση του \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1 = (1, 1, 1), \vec{e}_2 = (1, 1, 0), \vec{e}_3 = (1, 0, 0)\}$$

(3) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = B$$

Άσκηση 4. Θεωρούμε τα διανύσματα $(1, 2, 0, -4)$ και $(2, 0, -1, -3)$. Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε: $\text{Im}(f) = \langle (1, 2, 0, -4), (2, 0, -1, -3) \rangle$. Ακολουθώντας:

(1) Να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ της f ως προς τις κανονικές βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{C} των \mathbb{R}^3 και \mathbb{R}^4 αντίστοιχα.

(2) Να βρεθούν βάσεις \mathcal{B}' και \mathcal{C}' των \mathbb{R}^3 και \mathbb{R}^4 αντίστοιχα έτσι ώστε ο πίνακας $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)$ της f ως προς τις βάσεις \mathcal{B}' και \mathcal{C}' να είναι ο πίνακας:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5. Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^4 και \mathcal{B}' η βάση

$$\mathcal{B}' = \{\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \vec{\varepsilon}_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{\varepsilon}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\}$$

Έστω $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:

$$f(\vec{\varepsilon}_1) = 3\vec{\varepsilon}_2, \quad f(\vec{\varepsilon}_2) = 7\vec{\varepsilon}_4, \quad f(\vec{\varepsilon}_3) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3, \quad f(\vec{\varepsilon}_4) = \vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_3$$

Να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$.

Άσκηση 6. Έστω $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ δύο γραμμικές απεικονίσεις και έστω η βάση του \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 1, 1), \vec{e}_2 = (1, 1, 0), \vec{e}_3 = (1, 0, 0)\}$$

Αν

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

να βρεθούν οι γραμμικές απεικονίσεις $f + g$ και $-3f + 2g$ και $f \circ g$.

Άσκηση 7. Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Αν $\text{r}(A) = 1$, ναδειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες $B = M_{m \times 1}(\mathbb{K})$ και $C \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:

$$A = B \cdot C \quad \text{και} \quad \text{r}(A) = 1 = \text{r}(C)$$

Άσκηση 8. Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πίνακας στην κανονική βάση του \mathbb{R}^3 είναι ο ακόλουθος

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Να βρεθεί το διάνυσμα $f(x, y, z)$, για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Να βρεθεί ο πίνακας B της f στη βάση $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, -2), \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0), \vec{\varepsilon}_3 = (2, 0, 1)\}$.

(3) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

(4) Να υπολογισθεί ο πίνακας A^n , $\forall n \geq 1$.

Άσκηση 9. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ως προς τις βάσεις

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{e}_1 = (2, 0, 0), \vec{e}_2 = (-3, -1, 0), \vec{e}_3 = \left(0, 2, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{e}'_1 = (1, 0, 0), \vec{e}'_2 = (0, 1, 0), \vec{e}'_3 = (1, 0, 1) \right\}$$

του \mathbb{R}^3 είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f)$ της f ως προς τις βάσεις \mathcal{C} και \mathcal{D} , όπου

$$\mathcal{D} = \left\{ \vec{e}'_1 = (1, -1, 0), \vec{e}'_2 = (1, 0, 1), \vec{e}'_3 = (0, 1, -2) \right\}$$

Άσκηση 10. Να βρεθεί η (μοναδική) γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

της οποίας ο πίνακας ως προς τις βάσεις

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{e}_1 = (0, 1, 1), \vec{e}_2 = (1, 0, 1), \vec{e}_3 = (1, 1, 0) \right\}$$

και

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{e}'_1 = (1, 0), \vec{e}'_2 = (0, 1) \right\}$$

των \mathbb{R}^3 και \mathbb{R}^2 αντίστοιχα, είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Ακολουθώντας:

- (1) Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα $\text{Ker}(f)$ της f η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση \mathcal{B}' του \mathbb{R}^3 .
- (2) Να βρεθεί μια βάση της εικόνας $\text{Im}(f)$ της f η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση \mathcal{C}' του \mathbb{R}^2 .
- (3) Να βρεθεί ο πίνακας B της f ως προς τις βάσεις \mathcal{B}' και \mathcal{C}' .
- (4) Να βρεθεί αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας Q και αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας P έτσι ώστε:

$$Q^{-1}AP = B$$

Άσκηση 11. Έστω \mathcal{E} και \mathcal{F} δύο διανυσματικοί χώροι διάστασης 3 υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ μια βάση του \mathcal{E} και $\mathcal{C} = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ μια βάση του \mathcal{F} . Υποθέτουμε ότι ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις \mathcal{B} και \mathcal{C} είναι ο

$$A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda^2 & \mu^2 \end{pmatrix}$$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Να βρεθεί ο πίνακας $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)$ της f ως προς τις βάσεις \mathcal{B}' και \mathcal{C}' , όπου

$$\mathcal{B}' = \left\{ \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2 + (\lambda + 1)\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = \vec{e}_3 \right\}$$

Τέλος, αν $\lambda = \mu = 0$, να βρεθεί μια βάση \mathcal{D} του \mathcal{E} και μια βάση \mathcal{D}' του \mathcal{F} έτσι ώστε

$$M_{\mathcal{D}'}^{\mathcal{D}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

όπου $r = \mathbf{r}(f)$.

Άσκηση 12. Έστω η απεικόνιση $f: \mathbb{R}_3[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$, $f(P(t)) = P(t)' - P(t)''$.

- (1) Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική.
- (2) Να βρείτε μια βάση του $\text{Ker } f$ και μια βάση της $\text{Im } f$.
- (3) Να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}}(f)$, όπου $\mathfrak{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}_3[t]$ και $\mathfrak{C} = \{1, t, t^2\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}_2[t]$.
- (4) Να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{C}'}(f)$ όπου $\mathfrak{B}' = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}_3[t]$ και $\mathfrak{C}' = \{1, 2t-1, -1-4t+3t^2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}_2[t]$.
- (5) Να προσδιοριστούν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q έτσι ώστε: $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Άσκηση 13. Θεωρούμε τους πίνακες πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι. Αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι, να βρεθούν αντιστρέψιμοι 3×3 πίνακες Q και P έτσι ώστε: $Q^{-1}AP = B$.

Άσκηση 14. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η βαθμίδα $\mathbf{r}(A) := r$ του A και ακολούθως να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q έτσι ώστε

$$Q^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

όπου I_r είναι ο μοναδιαίος $r \times r$ πίνακας.

Άσκηση 15. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad f(x, y, z, w) = (2x+y-2z+w, 4x+y-2z-3w, x-y+2z-3w, 2x+2y-4z-5w, 3x+y-2z+2w)$$

- (1) Να βρεθεί ο πίνακας $A = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}}(f)$ της f ως προς τις κανονικές βάσεις \mathfrak{B} και \mathfrak{C} των \mathbb{R}^4 και \mathbb{R}^5 αντίστοιχα.
- (2) Να βρεθεί μια βάση \mathfrak{B}' του \mathbb{R}^4 και μια βάση \mathfrak{C}' του \mathbb{R}^5 έτσι ώστε:

$$B = M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{C}'}(f) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } r = \mathbf{r}(f)$$

- (3) Να βρεθούν αντιστρέψιμος 5×5 πίνακας Q και ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P έτσι ώστε:

$$Q^{-1}AP = B$$