

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 14 Ιανουαρίου 2022

**Άσκηση 1.** Για κάθε  $m \times n$  πίνακα  $A$ , η βαθμίδα στηλών του  $A$  είναι ίση με τη βαθμίδα γραμμών του  $A$ :

$$r(A) = \sigma(A) = \gamma(A)$$

**Άσκηση 2.** Έστω  $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  και  $h: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  τρεις γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ  $\mathbb{K}$ -διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθούν τα εξής:

- (1) Αν η  $g$  είναι επιμορφισμός, τότε:  $r(f \circ g) = r(f)$ .
- (2) Αν η  $f$  είναι μονομορφισμός, τότε:  $r(f \circ g) = r(g)$ .
- (3) Αν η  $h$  είναι μονομορφισμός και η  $g$  είναι επιμορφισμός, τότε:  $r(h \circ f \circ g) = r(f)$ .

**Άσκηση 3.** Έστω  $A$  και  $B$  δύο  $m \times n$  πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$ . Με χρήση της Άσκησης 2 να δειχθεί ότι οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν  $r(A) = r(B)$ .

**Άσκηση 4.** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{K})$  ένας  $n \times n$  πίνακας και  $\text{adj}(A)$  ο συμπληρωματικός του  $A$ . Να δειχθούν τα εξής:

- (1)  $\text{adj}(A) = O \iff r(A) < n - 1$ .
- (2)  $r(A) = n \implies r(\text{adj}(A)) = n$ .
- (3)  $r(A) < n - 1 \implies r(\text{adj}(A)) = 0$ .
- (4)  $r(A) = n - 1 \implies r(\text{adj}(A)) = 1$ .

**Άσκηση 5.** Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις

$$\mathcal{E} \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$$

μεταξύ  $\mathbb{K}$ -διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Αν  $f \circ g = 0$ , να δειχθεί ότι ισχύουν τα εξής:

- (1)  $\text{Im}(g) \subseteq \text{Ker}(f)$ .
- (2)  $r(f) + r(g) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$ .
- (3)  $r(f) + r(g) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$  αν και μόνον αν  $\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)$ .

**Άσκηση 6.** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας, όπου  $n \geq 2$ , με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$ . Να δειχθούν τα εξής:

- (1)
$$|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

(2)

$$\text{adj}(\text{adj}(A)) = |A|^{n-2}A$$

(3)

$$|\text{adj}(\text{adj}(A))| = |A|^{(n-1)^2}$$

**Άσκηση 7.** Να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 8.** Να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 9.** Αν  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 10.** Αν  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 11.** Αν  $a, b \in \mathbb{R}$ , να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 2 & 1 & b+1 & 4 \\ b & 3 & 2 & 3a \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 12.** Να βρεθούν οι τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες το γραμμικό σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} \lambda x + (3\lambda + 4)y + 2(\lambda + 1)z = 0 \\ \lambda x + (4\lambda + 2)y + (\lambda + 4)z = 0 \\ 2x + (3\lambda + 4)y + 3\lambda z = 0 \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό, και ακολούθως να λυθεί.

**Άσκηση 13.** Αν  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 + x_7 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = -\lambda \end{cases}$$

**Άσκηση 14.** Αν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} \alpha x + y + z = \alpha \\ x + \beta y + z = \beta \\ x + y + \gamma z = \gamma \end{cases}$$

**Άσκηση 15.** Να λυθεί το σύστημα ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ):

$$(\Sigma) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

**Άσκηση 16.** Πότε το σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} x + 5y - 2z + 6w = \kappa \\ 4x - 3y + 7z + 12w = \lambda \\ 5x - 44y + 35z - 6w = \mu \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό; Αν το  $(\Sigma)$  είναι συμβιβαστό, ποιά είναι η γενική του λύση;

**Άσκηση 17.** Αν  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}$$

**Άσκηση 18.** Αν  $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ , να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \kappa \\ x + y + \lambda^2 z = \kappa^2 \end{cases}$$

**Άσκηση 19.** Αν  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να λυθεί το ακόλουθο σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y + \lambda z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = \lambda \end{cases}$$

**Άσκηση 20.** Αν  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , να λυθεί το ακόλουθο σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$$