

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 15 Οκτωβρίου 2021

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας A καλείται **διαγώνιος**, αν είναι τετραγωνικός και τα μόνα στοιχεία του τα οποία ενδεχομένως είναι μη-μηδενικά βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο. Ένας διαγώνιος πίνακας καλείται **βαθμωτός** αν τα διαγώνια στοιχεία του είναι όλα ίσα μεταξύ τους. Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **συμμετρικός**, αν $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **αντισυμμετρικός**, αν $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$. Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **άνω τριγωνικός**, αντίστοιχα **αυστηρά άνω τριγωνικός**, αν $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$, αντίστοιχα $a_{ij} = 0$, $\forall i \geq j$. Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **κάτω τριγωνικός**, αντίστοιχα **αυστηρά κάτω τριγωνικός**, αν $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$, αντίστοιχα $a_{ij} = 0$, $\forall i \leq j$. Ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται **ταυτοδύναμος**, αν $A^2 = A$. Ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται **μηδενοδύναμος**, αν υπάρχει μη-αρνητικός ακέραιος k έτσι ώστε $A^k = O$.

Άσκηση 1. Να δοθούν παραδείγματα: βαθμωτού, διαγώνιου, άνω τριγωνικού, κάτω τριγωνικού, συμμετρικού, αντισυμμετρικού, αντιστρέψιμου, ταυτοδύναμου, και μηδενοδύναμου 4×4 πίνακα.

Άσκηση 2. Για ποιές τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ είναι οι ακόλουθοι πίνακες (i) βαθμωτοί, (ii) διαγώνιοι, (iii) συμμετρικοί, (iv) αντισυμμετρικοί, (v) άνω τριγωνικοί, (vi) κάτω τριγωνικοί:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \alpha & \gamma \\ -\gamma & -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 3. Ναδειχθεί ότι για δύο $m \times n$ πίνακες A και B ισχύει: $-(A + B) = (-A) + (-B)$.

Άσκηση 4. Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$.

- (1) Ναδειχθεί ότι κάθε $n \times n$ πίνακας A είναι ίσος με ένα άθροισμα πινάκων $D + D'$, όπου ο D είναι άνω τριγωνικός και ο D' κάτω τριγωνικός. Ακολουθώντας να εξεταστεί το κατά πόσο αυτή η παράσταση του A είναι μοναδική.
- (2) Ναδειχθεί ότι κάθε $n \times n$ πίνακας A είναι ίσος με ένα άθροισμα πινάκων $E + E'$, όπου ο E είναι αυστηρά άνω τριγωνικός και ο E' είναι κάτω τριγωνικός. Ακολουθώντας να εξεταστεί το κατά πόσο αυτή η παράσταση του A είναι μοναδική.

Άσκηση 5. Να βρεθεί η n -οστή δύναμη του πίνακα

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Είναι οι πίνακες T^n , $\forall n \geq 1$, αντιστρέψιμοι;

Άσκηση 6. Να υπολογιστεί το γινόμενο πινάκων:

$$(x \ y \ 1) \cdot \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

και κατόπιν να εκφραστούν ως γινόμενα πινάκων οι παρακάτω ισότητες:

(1) $x^2 + 9xy + y^2 + 8x + 5y + 2 = 0$,

(2) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$,

(3) $xy = \alpha^2$,

(4) $y^2 = 4\alpha x$.

Άσκηση 7. Να βρεθούν όλοι οι πίνακες $X \in M_2(\mathbb{K})$ για τους οποίους ισχύει ότι:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(4) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 8. Θεωρούμε τον πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, όπου $a_{ij} = \frac{1}{n}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. Να δείξετε ότι $A^2 = A$. Είναι ο A αντιστρέψιμος;

Άσκηση 9. Να βρεθούν οι πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2,$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς, να δείχθει ότι:

(α) οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμοι και να βρεθεί ο αντίστροφός τους.

(β) οι πίνακες $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμοι.

Άσκηση 10. Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, να δειχθεί ότι

$$A^3 - 5A^2 - 4A + 30I_3 = 0$$

Ακολουθώντας να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο A^{-1} .

Άσκηση 11. Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, θεωρούμε τους πίνακες:

$$E_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), \quad \text{όπου} \quad (E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = i \text{ \& } l = j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Με άλλα λόγια ο πίνακας E_{ij} είναι ο $m \times n$ πίνακας ο οποίος έχει κάθε στοιχείο του ίσο με 0 εκτός από το στοιχείο του στη θέση (i, j) το οποίο είναι ίσο με 1. Να δειχθεί ότι:

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{kl} E_{il}, \quad \text{όπου} \quad \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = l \\ 0, & \text{αν } k \neq l \end{cases} \quad \text{είναι το δέλτα του Kronecker}$$

Ειδικές περιπτώσεις πινάκων E_{ij} αναφέρονται στις επόμενες δύο ασκήσεις.

Άσκηση 12. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Υποθέτουμε ότι:

$$\forall i = 1, 2, \dots, n : E_{i1} \cdot A = A \cdot E_{i1}$$

Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι βαθμωτός, δηλαδή υπάρχει $\lambda \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $A = \lambda I_n$.

Άσκηση 13. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Υποθέτουμε ότι:

$$\forall i = 1, 2, \dots, n : E_{ii} \cdot A = A \cdot E_{ii}$$

Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι διαγώνιος, δηλαδή υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 14. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ και $m \geq 1$. Αν $AB = BA$, να δειχθεί ότι:

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

όπου

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

είναι ο διωνυμικός συντελεστής. Να δοθεί παράδειγμα πινάκων για τους οποίους ο παραπάνω τύπος δεν ισχύει.

Υπενθυμίζουμε ότι το **ίχνος** ενός $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα $A = (a_{ij})$ είναι ο αριθμός

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Άσκηση 15. Έστω A, B δύο $n \times n$ τετραγωνικοί πίνακες. Αν $\lambda \in \mathbb{K}$, να δειχθεί ότι:

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B), \quad \text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A), \quad \text{Tr}(I_n) = n$$

Άσκηση 16. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν $n \times n$ πίνακες A και B έτσι ώστε:

$$AB - BA = I_n$$

Άσκηση 17. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Υποθέτουμε ότι:

$$\forall X \in M_n(\mathbb{K}) : \text{Tr}(A \cdot X) = 0$$

Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι ο μηδενικός: $A = O$.

Άσκηση 18. Έστω $A, B \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A \cdot {}^t B \neq -1$. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $I_n + {}^t B \cdot A$ είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 19. Έστω ο πίνακας πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθεί ο πίνακας A^2 . Είναι ο A αντιστρέψιμος;

Υπενθυμίζουμε ότι ένας $n \times n$ πίνακας A καλείται **μηδενοδύναμος** αν υπάρχει θετικός ακέραιος k έτσι ώστε: $A^k = 0$. Για παράδειγμα ο 3×3 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι μηδενοδύναμος. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι ένας (άνω ή κάτω) τριγωνικός $n \times n$ πίνακας καλείται **αυστηρά (άνω ή κάτω) τριγωνικός** αν όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι ίσα με μηδέν.

Άσκηση 20. Να δειχθεί ότι ένας αυστηρά (άνω ή κάτω) τριγωνικός $n \times n$ πίνακας A , $n \geq 2$, είναι μηδενοδύναμος.

Άσκηση 21. Έστω A ένας μηδενοδύναμος 2×2 πίνακας. Να δειχθεί ότι $\text{Tr}(A) = 0$.

Άσκηση 22. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν υπάρχουν 3×2 πίνακες X, Y έτσι ώστε

$$-2X + 7Y = A \quad \text{και} \quad X - 3Y = B$$

Άσκηση 23. Να δειχθεί ότι για τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

είναι $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, μολονότι $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

Άσκηση 24. Να προσδιορισθούν όλοι οι 2×2 πίνακες A με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} για τους οποίους ισχύει ότι

$$(1) A^2 = I_2.$$

$$(2) A^2 = O.$$

Άσκηση 25. Να βρεθεί η m -οστή δύναμη του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 26. Ας είναι A ένας αυστηρά άνω τριγωνικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} . Να δειχθεί ότι $A^n = O$.

Άσκηση 27. Να εξεταστεί αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος. Αν είναι αντιστρέψιμος, ποιος είναι ο αντίστροφός του;

Άσκηση 28. Να βρεθεί η n -οστή δύναμη του $k \times k$ πίνακα

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Πότε ο πίνακας $J_k(\lambda)$ είναι αντιστρέψιμος; Αν είναι αντιστρέψιμος, ποιος είναι ο αντίστροφός του;

Άσκηση 29. Έστω ότι A και B είναι δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες.

$$(1) AB = BA.$$

$$(2) AB^{-1} = B^{-1}A.$$

$$(3) A^{-1}B = BA^{-1}.$$

$$(4) A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο **ανάστροφος** ενός $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ ορίζεται να είναι ο $n \times m$ πίνακας tA , όπου

$$({}^tA)_{ij} = a_{ji}$$

δηλαδή οι γραμμές (στήλες) του tA είναι οι στήλες (γραμμές) του A .

Άσκηση 30. Έστω A και B δύο $m \times n$ πίνακες. Ναδειχθεί ότι:

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$$

Αν οι πίνακες είναι τετραγωνικοί, $n = m$, τότε ναδειχθεί ότι:

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

Τέλος αν ο τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο πίνακας tA είναι αντιστρέψιμος και:

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται:

- (1) **συμμετρικός**, αν: ${}^tA = A$,
- (2) **αντισυμμετρικός**, αν: ${}^tA = -A$.

- Άσκηση 31.**
- (1) Ναδειχθεί ότι το γινόμενο δύο συμμετρικών $n \times n$ πινάκων είναι συμμετρικός πίνακας.
 - (2) Ναδειχθεί ότι ο αντιστροφος ενός αντιστρέψιμου συμμετρικού πίνακα είναι συμμετρικός πίνακας.
 - (3) Ναδειχθεί ότι ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου αντισυμμετρικού πίνακα είναι αντισυμμετρικός πίνακας.
 - (4) Ναδειχθεί ότι το γινόμενο δύο αντισυμμετρικών $n \times n$ πινάκων A και B είναι συμμετρικός πίνακας αν και μόνον αν $AB = BA$.
 - (5) Ναδειχθεί ότι το γινόμενο δύο αντισυμμετρικών $n \times n$ πινάκων A και B είναι αντισυμμετρικός πίνακας αν και μόνον αν $AB = -BA$.

Άσκηση 32. Ναλυθεί η εξίσωση $n \times n$ πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 33. Ναδειχθεί ότι, για κάθε $m \geq 1$, η m -οστή δύναμη ενός άνω τριγωνικού (αντίστοιχα αυστηρά άνω τριγωνικού) $n \times n$ πίνακα είναι επίσης άνω τριγωνικός (αντίστοιχα αυστηρά άνω τριγωνικός) $n \times n$ πίνακας.

Άσκηση 34. Ναεξεταστεί αν ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου άνω τριγωνικού πίνακα $n \times n$ πίνακα είναι επίσης άνω τριγωνικός πίνακας.

Άσκηση 35. Ναδειχθεί ότι A είναι ένας μηδενοδύναμος 2×2 πίνακας, τότε $A^2 = O$.

Άσκηση 36. Ναβρεθούν οι τιμές του n για τις οποίες ισχύει ότι:

- (1) Να βρεθούν οι τιμές του n για τις οποίες ισχύει ότι: ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $\text{Tr}(A) \neq 0$.
- (2) Αν $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, τότε να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{K}$ για τις οποίες ισχύει ότι: $AB - BA = \lambda I_n$.