ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 3

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html

Παρασκευή 5 Νοεμβρίου 2021

Άσκηση 1. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2. *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας 2×2 πίνακας, και έστω ο πίνακας*

$$\mathsf{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

όπου A_{ij} είναι ο συμπαράγοντας του στοιχείου a_{ij}. Να δειχθεί ότι:

$$|\mathsf{adj}(A)| = |A| \quad \textit{και} \quad \mathsf{adj}(\mathsf{adj}(A)) = A$$

Άσκηση 3. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4. *Είναι γνωστό ότι οι αριθμοί*

$$20604, \quad 53227, \quad 25755, \quad 20927, \quad 289$$

διαιρούνται από το 17. Να δειχθεί ότι η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

διαιρείται από το 17.

Άσκηση 5. *Να υπολογίσετε τις ορίζουσες των ακόλουθιων πινάκων:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 8 \\ 5 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 6. *Εάν* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 4$, *να υπολογισθεί η ορίζουσα*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 4a_3 - 2a_2 \\ b_1 & b_2 & 4b_3 - 2b_2 \\ \frac{1}{2}c_1 & \frac{1}{2}c_2 & 2c_3 - c_2 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 7. *Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα A ο οποίος είναι της μορφής:*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

όπου $B \in \mathsf{M}_{r\times r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathsf{M}_{r\times(n-r)}(\mathbb{K})$, $O \in \mathsf{M}_{(n-r)\times r}(\mathbb{K})$, $D \in \mathsf{M}_{(n-r)\times(n-r)}(\mathbb{K})$.
Να δείξετε ότι:

$$|A| = |B| \cdot |D|$$

Άσκηση 8. *Να ευρεθούν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες δεύτερης τάξης και όλοι οι συμπαράγοντες τού πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 9. *Να βρεθεί ο ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, όπου $a_{ij} = \min\{i, j\}$.*

(*Απάντηση*: 1)

Άσκηση 10. *Να βρεθεί ο ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, όπου $a_{ij} = \max\{i, j\}$.*

(*Απάντηση*: $(-1)^{n-1}n$)

Άσκηση 11. *Να βρεθεί ο ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, όπου $a_{ij} = |i - j|$.*

(*Απάντηση*: $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$)

Άσκηση 12. *Να ευρεθεί η ορίζουσα τού προηγούμενου πίνακα ως ανάπτυγμα*

(1) *κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής,*
(2) *κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης,*
(3) *κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής,*
(4) *κατά τα στοιχεία της δεύτερης στήλης,*
(5) *κατά τα στοιχεία της τρίτης γραμμής,*
(6) *κατά τα στοιχεία της τρίτης στήλης.*

Άσκηση 13. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να προσδιοριστούν οι αριθμοί Δ_{13} *και* A_{13}, Δ_{23} *και* A_{23}, Δ_{22} *και* A_{22}, *και* Δ_{21} *και* A_{21}.

Άσκηση 14. *Να προσδιοριστεί η ορίζουσα των επόμενων πινάκων*

(1) *αναπτύσσοντάς την ως προς τη στήλη ή τη γραμμή τής επιλογής σας.*
(2) *με χρήση κατάλληλων πράξεων επί των γραμμών ή των στηλών.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & 7 \\ 2 & a-3 & 4 \\ 5 & a+1 & a \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 15. *Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός των μηδενικών στοιχείων που μπορεί να έχει ένας* 4×4 *πίνακας, χωρίς όμως η ορίζουσά του να είναι ίση με μηδέν;*

Άσκηση 16. *Να λυθεί η εξίσωση, ως προς* x:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 17. *Θεωρούμε δύο* 2×2 *πίνακες* A *και* B *με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$ *και υποθέτουμε ότι:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 7 & x+3 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο αριθμός x.

Άσκηση 18. *Να δείξετε ότι για τον* $n \times n$ *πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ισχύει:

$$|A| = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

Άσκηση 19. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 20. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \beta \\ \beta & \alpha+\beta & \beta & \cdots & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha+\beta & \cdots & \beta & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha+\beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Άσκηση 21. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Άσκηση 22. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Απάντηση: $|A| = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \end{cases}.$

Άσκηση 23. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Απάντηση: $|A| = \begin{cases} 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \\ 1, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \end{cases}.$

Άσκηση 24. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 25. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 26. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 27. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 28. *Αν $a, b \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{pmatrix}$$

Απάντηση: $a^n + b^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1}$.

Άσκηση 29. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Απάντηση: $5 \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-1}$.

Άσκηση 30. *Αν a_i, $0 \leq i \leq n$, είναι μη-μηδενικοί αριθμοί, να βρεθεί η ορίζουσα του $(n+1) \times (n+1)$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Απάντηση: $a_1 a_2 \cdots a_n \big(a_0 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \cdots - \frac{1}{a_n}\big)$.

Άσκηση 31. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & \cdots & 1+x_1y_{n-1} & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 & \cdots & 1+x_2y_{n-1} & 1+x_2y_n \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & \cdots & 1+x_3y_{n-1} & 1+x_3y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1+x_{n-1}y_1 & 1+x_{n-1}y_2 & 1+x_{n-1}y_3 & \cdots & 1+x_{n-1}y_{n-1} & 1+x_{n-1}y_n \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & 1+x_ny_3 & \cdots & 1+x_ny_{n-1} & 1+x_ny_n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 32. *Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 33. *Έστω ότι x, y, a είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ y & a & x & \cdots & x & x \\ y & y & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & a & x \\ y & y & y & \cdots & y & a \end{pmatrix}$$

Άσκηση 34. *Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \cdots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \cdots & x^{n-4} & x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^2 & x^3 & x^4 & \cdots & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 35. *Έστω ότι x, y, a είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ y & a & x & \cdots & x & x \\ y & y & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & a & x \\ y & y & y & \cdots & y & a \end{pmatrix}$$

Άσκηση 36. *Έστω ότι $x, y, a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα*

$$A_n = \begin{pmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n-1 & x \\ x & x & x & \cdots & x & x+n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 37. *Να δειχθεί ότι:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_{12} & 0 & \cdots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \cdots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \cdots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \cdots & 0 & b_{2n} \\ \vdots & \vdots\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \cdots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Άσκηση 38. *Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα A, όπου, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$:*

$$a_{ij} = \big(i,\, j\big) : \ \text{ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των θετικών ακεραίων } i \text{ και } j$$

Να δειχθεί ότι:

$$|A| = \varphi(1)\,\varphi(2)\,\cdots\,\varphi(n)$$

όπου φ είναι η συνάρτηση του Euler.