ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 6

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html

Παρασκευή 26 Νοεμβρίου 2021

Άσκηση 1. *Θεωρούμε την κανονική βάση*

$$\mathcal{B} = \left\{\vec{e}_1 = 1, \quad \vec{e}_1 = x, \quad \vec{e}_1 = x^2, \quad \vec{e}_1 = x^3\right\}$$

του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_3[t]$. *Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων*

$$\mathcal{B}' = \left\{\vec{\varepsilon}_1 = 1 + x^3, \quad \vec{\varepsilon}_1 = x, \quad \vec{\varepsilon}_1 = x + x^3, \quad \vec{\varepsilon}_1 = x^2 + x^3\right\}$$

είναι βάση του $\mathbb{R}_3[x]$, *και στη συνέχεια να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης* P *από την βάση* $\mathcal{B}$ *στην βάση* $\mathcal{B}'$ *και ο πίνακας μετάβασης* Q *από την βάση* $\mathcal{B}'$ *στην βάση* $\mathcal{B}$. *Να επαληθεύσετε ότι:* $Q = P^{-1}$.

Άσκηση 2. *Για κάθε* $\alpha \in \mathbb{K}$, *θεωρούμε τις βάσεις*

$$\mathcal{B} = \left\{1,\ t,\ t^2,\ \cdots,\ t^n\right\}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{1,\ t - \alpha,\ (t-\alpha)^2,\ \cdots,\ (t-\alpha)^n\right\}$$

του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n[t]$. *Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης* P *από την βάση* $\mathcal{B}$ *στην βάση* $\mathcal{B}'$ *και ο πίνακας μετάβασης* Q *από την βάση* $\mathcal{B}'$ *στην βάση* $\mathcal{B}$. *Να επαληθεύσετε ότι:* $Q = P^{-1}$. *Ποιές είναι οι συνιστώσες του τυχόντος* $P(t) \in \mathbb{K}_n[t]$ *στις βάσεις* $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{B}'$;

Άσκηση 3. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$ *και υποθέτουμε ότι* $\mathcal{B} = \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right\}$ *είναι μια βάση του* $\mathcal{E}$. *Να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \left\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n, \vec{e}_n + \vec{e}_1\right\}$$

είναι επίσης βάση του $\mathcal{E}$ *και να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης* $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ *και* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$.

Άσκηση 4. *Έστω* $\mathcal{B} = \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right\}$ *μια βάση του* $\mathbb{K}$*-διανυσματικού χώρου* $\mathbb{K}_3[x]$ *και έστω το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \left\{\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\right\} \subseteq \mathbb{K}_3[x]$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathcal{C}$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{K}_3[x]$, *να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης* $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ *και* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$, *και να βρεθούν οι συνιστώσες του πολυωνύμου*

$$P(x) = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{6}\vec{e}_3 + \frac{1}{24}\vec{e}_4$$

ως προς τη βάση $\mathcal{C}$.

Να εξετάσετε ειδικότερα τις περιπτώσεις: (α) $\mathcal{B}$ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{K}_3[x]$ *και,* (β) $\mathcal{B}$ *είναι η βάση* $\mathcal{B}'$ *της Άσκησης 2.*

Άσκηση 5. *Να δειχθεί ότι το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \big\{1,\, 1+x,\, 1+x+x^2,\, \cdots,\, 1+x+x^2+\cdots+x^n\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[x]$. Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ και $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, όπου $\mathcal{B}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}_n[x]$. Ποιές είναι οι συνιστώσες ενός πολυωνύμου

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

στη βάση $\mathcal{C}$;

Άσκηση 6. *Θεωρούμε το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \big\{(1+t)^n,\ t(1+t)^{n-1},\ t^2(1+t)^{n-2},\ \cdots,\ t^n\big\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n[t]$ και ακολούθως να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης από την κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{K}_n[t]$ στην $\mathcal{C}$ και από τη βάση $\mathcal{C}$ στην κανονική βάση $\mathcal{B}$.

Άσκηση 7. *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι ο πίνακας μετάβασης από μια βάση $\mathcal{B}$ σε μια βάση $\mathcal{C}$ ενός κατάλληλου $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$.*

Υπόδειξη: Θεωρείστε τον $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}_n$ των στηλών με n στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ και θεωρείστε την κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{K}_n$.

Άσκηση 8. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n$, να δειχθεί ότι υπάρχουνν υπόχωροι $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_n$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$\mathcal{V}_0 \ \subseteq\ \mathcal{V}_1 \ \subseteq\ \cdots\ \subseteq \mathcal{V}_{n-1}\ \subseteq \mathcal{V}_n = \mathcal{E}$$

έτσι ώστε, $\forall k = 0, 1, 2, \cdots, n$: $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}_k = k$.

Άσκηση 9. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση.*
(2) *Αν*

$$\mathcal{V}_0 \ \subseteq\ \mathcal{V}_1 \ \subseteq\ \cdots\ \subseteq\ \mathcal{V}_n \ \subseteq\ \mathcal{V}_{n+1} \ \subseteq\ \cdots\ \subseteq \mathcal{E}$$

είναι μια αύξουσα ακολουθία υπόχωρων του $\mathcal{E}$, τότε υπάρχει $n \geq 0$ έτσι ώστε:

$$\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_{n+1} = \cdots$$

Αν ισχύει η συνθήκη (2) και n είναι ο μεγαλύτερος μη-αρνητικός ακέραιος έτσι ώστε $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_{n+1} = \cdots$, για κάθε τέτοια ακολουθία υπόχωρων, τότε να δειχθεί ότι ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση και:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n$$

Άσκηση 10. *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Θεωρούμε τα υποσύνολα:*

$$\mathcal{U}(A) = \big\{AX \in \mathbb{K}_m \mid X \in \mathbb{K}_n\big\} \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{V}(A) = \big\{{}^tAAX \in \mathbb{K}_m \mid X \in \mathbb{K}_n\big\}$$

Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{U}(A)$ και $\mathcal{V}(A)$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{K}_m$ και:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}(A) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{V}(A)$$

Άσκηση 11. *Να δειχθεί ότι το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, θεωρούμενο ως $\mathbb{Q}$-διανυσματικός χώρος έχει άπειρη διάσταση:*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} = \infty$$

Άσκηση 12. *Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{K}^6$:*

$$\mathcal{U} = \big\{(x, x+z, x-y+2z, -z, x, y) \in \mathbb{K}^6 \mid x, y, z \in \mathbb{K}\big\}$$

$$\mathcal{V} = \big\{(x+y-w, x+y+z, w, -y-z, -y, z+w) \in \mathbb{K}^6 \mid x, y, z, w \in \mathbb{K}\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{K}^6$.*
(2) *Να βρεθούν βάσεις των $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ οι οποίες να επεκταθούν σε βάσεις του $\mathbb{K}^6$.*
(3) *Να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ και $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$.*

Άσκηση 13. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$:*

$$\vec{x}_1 = (1, 2, 1, -2), \quad \vec{x}_2 = (1, 0, 1, -1), \quad \vec{x}_3 = (1, 2, 2, -3)$$

$$\vec{y}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{y}_2 = (1, 0, 1, -1), \quad \vec{y}_3 = (1, 3, 0, -4)$$

Αν

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{U} = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \rangle$$

να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}+\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$.

Άσκηση 14. *Θεωρούμε τα σύνολα διανυσμάτων του $\mathbb{K}^4$:*

$$\mathcal{A}_1 = \big\{(2,\ 1,\ 4,\ 3),\ \ (2,\ 1,\ 2,\ 0)\big\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \big\{(1,\ 1,\ 2,\ 0),\ \ (2,\ 1,\ 0,\ 2)\big\}$$

$$\mathcal{A}_3 = \big\{(1,\ 2,\ 3,\ 4),\ \ (0,\ 4,\ 5,\ 2)\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι τα σύνολα διανυσμάτων $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, και $\mathcal{A}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*
(2) *Να συμπληρωθούν τα σύνολα $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, και $\mathcal{A}_3$ σε βάσεις $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, και $\mathcal{B}_3$ του $\mathbb{K}^4$.*
(3) *Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης:*
   (α΄) $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ *από τη βάση $\mathcal{B}_1$ στη βάση $\mathcal{B}_2$.*
   (β΄) $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}$ *από τη βάση $\mathcal{B}_2$ στη βάση $\mathcal{B}_3$.*
   (γ΄) $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}$ *από τη βάση $\mathcal{B}_1$ στη βάση $\mathcal{B}_3$.*
(4) *Να επαληθεύσετε ότι:*

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3} = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \cdot M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}$$

Άσκηση 15. *Θεωρούμε n το πλήθος στοιχεία $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ενός σώματος $\mathbb{K}$ και έστω τα διανύσματα:*

$$\vec{x}_1 = (0, a_1, a_2, \cdots, a_n),\ \ \vec{x}_2 = (a_1, 0, \cdots, 0),\ \ \vec{x}_3 = (a_2, 0, \cdots, 0),\ \cdots,\ \vec{x}_{n+1} = (a_n, 0, \cdots, 0)$$

του $\mathbb{K}^{n+1}$. Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{U}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_{n+1}$ και να συμπληρωθεί σε μια βάση $\mathcal{C}$ του $\mathbb{K}^{n+1}$. Ποιός είναι ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{K}^{n+1}$ στη βάση $\mathcal{C}$ και ποιός ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}$ στη βάση $\mathcal{B}$;

Υπενθυμίζουμε ότι, αν $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, τότε το άθροισμα

$$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n = \big\{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n \in \mathcal{E} \mid \vec{x}_i \in \mathcal{U}_i,\ 1 \le i \le n\big\}$$

των υπόχωρων $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n$ είναι επίσης ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

Το άθροισμα $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{U}_n$ των υπόχωρων $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots, \mathcal{U}_n$ καλείται **ευθύ άθροισμα** αν ισχύει η μοναδικότητα της γραφής:

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{x}'_1 + \vec{x}'_2 + \cdots + \vec{x}'_n, \ \text{ όπου } \ \vec{x}_i, \vec{x}'_i \in \mathcal{U}_i,\ 1 \le i \le n \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}_i = \vec{x}'_i,\ \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

Αν το άθροισμα $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\cdots+\mathcal{U}_n$ είναι ευθύ, τότε θα γράφουμε: $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\cdots+\mathcal{U}_n=\mathcal{U}_1\oplus\mathcal{U}_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{U}_n$.

Άσκηση 16. *Έστω ότι $\mathcal{U}_1,\,\mathcal{U}_2,\,\cdots,\,\mathcal{U}_n$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\cdots+\mathcal{U}_n=\mathcal{U}_1\oplus\mathcal{U}_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{U}_n$.

(2)

$$\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_n=\vec{0},\ \ \textit{όπου}\ \ \vec{x}_i\in\mathcal{U}_i,\ 1\leq i\leq n \quad\Longrightarrow\quad \vec{x}_i=\vec{0},\ \forall i=1,2,\cdots,n$$

(3) $\forall i=1,2,\cdots,n$:

$$\mathcal{U}_i\bigcap\big(\mathcal{U}_1+\cdots+\mathcal{V}_{i-1}+\mathcal{V}_{i+1}+\cdots+\mathcal{V}_n\big)=\{\vec{0}\}$$

Άσκηση 17. *Θεωρούμε το υποσύνολο*

$$\mathcal{U}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{K}^3\ |\ 2x+y+3z=0\big\}\ \subseteq\ \mathbb{K}^3$$

Να δειχθεί ότι το υποσύνολο $\mathcal{U}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^3$ και να βρεθεί υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathbb{K}^3$ έτσι ώστε:

$$\mathbb{K}^3=\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}$$

Άσκηση 18. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{B}=\big\{\vec{e}_1,\,\vec{e}_2,\,\cdots,\,\vec{e}_n\big\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Να δειχθεί ότι*

$$\mathcal{E}=\mathcal{U}_1\oplus\mathcal{U}_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{U}_n$$

όπου $\mathcal{U}_i=\langle\vec{e}_i\rangle$, $1\leq i\leq n$.

Άσκηση 19. *Έστω ότι $\mathcal{U}_1,\,\mathcal{U}_2,\,\cdots,\,\mathcal{U}_n$ είναι υπόχωροι ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, και υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση.*

(1)

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big(\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\cdots+\mathcal{U}_n\big)\ \leq\ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}_1+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}_2+\cdots+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}_n$$

(2) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α΄)

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\big(\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\cdots+\mathcal{U}_n\big)\ =\ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}_1+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}_2+\cdots+\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{U}_n$$

(β΄) $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\cdots+\mathcal{U}_n=\mathcal{U}_1\oplus\mathcal{U}_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{U}_n$.

Άσκηση 20. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος και $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, και $\mathcal{W}$ τρεις υπόχωροι του $\mathcal{E}$.*

(1) *Αν $\mathcal{E}=\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}$ και $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{W}$, να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{E}=\mathcal{U}\oplus\big(\mathcal{V}\cap\mathcal{W}\big)$$

(2) *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α΄) $\mathcal{E}=\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}\oplus\mathcal{W}$.

(β΄) (i) $\mathcal{E}=\mathcal{U}+\mathcal{V}+\mathcal{W}$.

(ii) $\mathcal{U}\cap\big(\mathcal{V}+\mathcal{W}\big)=\{\vec{0}\}$ *και* $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}=\{\vec{0}\}$.

Άσκηση 21. *Έστω $\mathcal{V}$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_4[t]$ ο οποίος παράγεται από τα πολυώνυμα*

$$t^4+3t^3-3t^2+4t-1,\qquad t^4+4t^3-t^2-2t-2,\qquad 2t^4+9t^3-2t-5$$

$\mathcal{U}$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_4[t]$ ο οποίος παράγεται από τα πολυώνυμα

$$t^4+6t^3+2t^2+3t-2,\qquad 2t^4+8t^3-t^2-5t+6,\qquad 2t^4+9t^3-6t-5$$

Να βρεθούν μια βάση του $\mathcal{V}+\mathcal{U}$ η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}_4[t]$, και μια βάση του $\mathcal{V}\cap\mathcal{U}$ η οποία να συμπληρωθεόι σε μια βάση $\mathcal{C}$ του $\mathbb{R}_4[t]$. Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης μεταξύ των βάσεων $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$.

Άσκηση 22. *Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}^5$:*

$$\mathcal{U} = \big\{(x, 2x, -x, 3x) \in \mathbb{K}^4 \mid x \in \mathbb{K}\big\}$$
$$\mathcal{V} = \big\{(x, y, -x + 3y, -y) \in \mathbb{K}^4 \mid x, y \in \mathbb{K}\big\}$$
$$\mathcal{W} = \big\{(x, 0, y, z) \in \mathbb{K}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{K}\big\}$$

(1) *Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρου του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}^4$.*
(2) *Να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, $\mathcal{U} + \mathcal{W}$, $\mathcal{V} + \mathcal{W}$, $\mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}$.*
(3) *Να εξετασθεί αν: $\mathbb{K}^4 = \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} + \mathcal{W})$ ή $\mathbb{K}^4 = \mathcal{V} \oplus (\mathcal{U} + \mathcal{W})$ ή $\mathbb{K}^4 = \mathcal{W} \oplus (\mathcal{U} + \mathcal{V})$.*

Άσκηση 23. *Να δειχθεί ότι τα σύνολα διανυσμάτων*

$$\mathcal{U} = \big\{(x, 0, 0) \in \mathbb{K}^3 \mid x \in \mathbb{K}\big\}$$
$$\mathcal{V} = \big\{(x, 0, 2x) \in \mathbb{K}^3 \mid x \in \mathbb{K}\big\}$$
$$\mathcal{W} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y - z = 0 \ \textit{και} \ x - 2y + z = 0\big\}$$

είναι υπόχωροι του $\mathbb{K}^3$ και ακολούθως να δειχθεί ότι:

$$\mathbb{K}^3 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

Άσκηση 24. *Θεωρούμε τους 2×2 πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν $\mathcal{V} = \langle A,\ B,\ C\rangle$ και $\mathcal{U} = \langle X,\ Y,\ Z\rangle$:

(1) *Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους $\mathcal{V}$ και $\mathcal{U}$, οι οποίες να συμπληρωθούν σε βάσεις του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.*
(2) *Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ και $\mathcal{V} + \mathcal{U}$.*
(3) *Να βρεθούν υπόχωροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ έτσι ώστε:*

$$\mathsf{M}_2(\mathbb{R}) = (\mathcal{V} \cap U) \oplus \mathcal{X} \quad \textit{και} \quad \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) = (\mathcal{V} + U) \oplus \mathcal{Y}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένας $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **αυστηρά άνω τριγωνικός**, αν: $a_{ij} = 0$, $1 \leq j \leq i \leq n$. Ο $n \times n$ πίνακας A καλείται $A = (a_{ij})$ καλείται **αυστηρά κάτω τριγωνικός**, αν: $a_{ij} = 0$, $1 \leq i \leq j \leq n$.

Άσκηση 25. *Αν $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα, έστω $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων υπεράνω του $\mathbb{K}$, έστω $\mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των κάτω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων υπεράνω του $\mathbb{K}$, και έστω $\mathsf{D}_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των διαγωνίων $n \times n$ πινάκων υπεράνω του $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) = \mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathsf{D}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$$

Άσκηση 26. *Έστω ότι $\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_n$ είναι ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο πολυωνύμων $P_0(t), P_1(t), \cdots, P_n(t)$ βαθμού n, έτσι ώστε:*

$$\forall i, j = 0, 1, 2, \cdots, n: \quad P_i(\rho_j) = \begin{cases} 1, & \textit{αν}\ i = j \\ 0, & \textit{αν}\ i \neq j \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο πολυωνύμων $\mathcal{C} = \big\{P_0(t), P_1(t), \cdots, P_n(t)\big\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}_n[t]$, και ακολούθως να βρεθούν οι συνιστώσες τυχόντος πολυωνύμου $Q(t)$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$.