

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 3 Δεκεμβρίου 2021

Άσκηση 1. Έστω \mathbb{C} το σώμα των μιγαδικών αριθμών. Θα γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ όταν θεωρούμε το \mathbb{C} ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του \mathbb{C} και θα γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ όταν θεωρούμε το \mathbb{C} ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του \mathbb{R} .

(1) Η απεικόνιση:

$$f: \mathbb{C}_{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{C}}, \quad f(z, w) = z + \bar{w}$$

δεν είναι γραμμική.

(2) Η απεικόνιση:

$$f: \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}, \quad f(z, w) = z + \bar{w}$$

είναι γραμμική.

Παραπάνω \bar{z} συμβολίζει τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$, δηλαδή $\bar{z} = a - bi$.

Άσκηση 2. Να περιγραφούν όλες οι γραμμικές απεικονίσεις $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, όταν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 1$.

Άσκηση 3. Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε: $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

Άσκηση 4. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$f: M_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}_4, \quad f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

είναι ισομορφισμός. Να γενικευτεί το συμπέρασμα για τον \mathbb{K} -διανυσματικό χώρο $M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Άσκηση 5. Να εξετασθεί ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές:

(1) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x, y) = (x + y, 2xz, 3x, x - z + 2y)$.

(2) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (y + z, 2x + z, 3x - y + z)$.

(3) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (y - 2z + 1, x - 2y, 1 - 2y)$.

(4) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y + z, z + 2x, x - 3y)$.

(5) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + y, x + z, y^2)$.

(6) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, y + 1, z + 2)$.

Άσκηση 6. Ναδειχθεί ότι η γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 7. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, z)$.

(1) Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και την εικόνα $\text{Im}(f)$ της f .

(2) Να βρεθεί ο υπόχωρος $f(\mathcal{V})$, όπου

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

(3) Να βρεθεί ο υπόχωρος $f^{-1}(\mathcal{W})$, όπου

$$\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$$

Άσκηση 8. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - z, x + y, x - y - z)$.

(1) Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και την εικόνα $\text{Im}(f)$ της f .

(2) Να βρεθεί ο υπόχωρος $f(\mathcal{V})$, όπου

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$$

(3) Να βρεθεί ο υπόχωρος $f^{-1}(\mathcal{W})$, όπου

$$\mathcal{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = 0\}$$

(4) Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου $f(\mathcal{V}) \cap f^{-1}(\mathcal{W})$.

Άσκηση 9. Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y, yz, -x + y + z)$$

$$g: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (2a_2 - 3a_1 + a_0) + (a_2 - 2a_1)x + 2a_2x^2$$

Ναδειχθεί ότι οι f και g είναι ισομορφισμοί και να βρεθούν οι απεικονίσεις f^{-1} και g^{-1} .

Άσκηση 10. Να ορίσετε ένα ισομορφισμό από τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_3[t]$ στον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, και έναν ισομορφισμό από τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_3[t]$ στον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^4 .

Άσκηση 11. Να προσδιορίσετε ποιό από τους ακόλουθους διανυσματικούς χώρους είναι ισόμορφοι μεταξύ τους:

$$\mathbb{C}, \quad \mathbb{R}_2[x], \quad \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{M}_2(\mathbb{R}), \quad \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{R}_6[x], \quad \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}_1[x], \quad \{A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^t A = A\}$$

Άσκηση 12. Να προσδιορίσετε (χωρίς να το επιλύσετε) τη διάσταση του χώρου λύσεων του συστήματος:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 13. Στον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_2[t]$ θεωρούμε τους υπόχωρους

$$\mathcal{V} = \langle t^2 + t, t + 1 \rangle, \quad \mathcal{W} = \langle -t^2 + t + 2, t + 3 \rangle$$

Να βρεθεί ένας ισομορφισμός $f: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$.

Άσκηση 14. Να δείξετε ότι:

(1) Η γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (4x - 2y - z, 3x - 4y + z)$$

είναι επιμορφισμός, αλλά όχι μονομορφισμός. Επιπλέον ναδειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$\mathbb{R}^3 \cong \text{Ker}(f) \oplus \mathbb{R}^2$$

(2) Η γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (2x - y, x + 2y, 0)$$

είναι μονομορφισμός, αλλά όχι επιμορφισμός. Επιπλέον ναδειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$\mathbb{R}^3 \cong \text{Im}(f) \oplus \mathbb{R}$$

Άσκηση 15. Θεωρούμε τον υπόχωρο

$$\mathcal{V} = \{(x, 0, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$

(1) Να βρεθεί μια γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε:

$$\text{Ker}(f) = \mathcal{V}$$

(2) Να βρεθεί μια γραμμική απεικόνιση $g: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε:

$$\text{Im}(g) = \mathcal{V}$$

Άσκηση 16. Να βρεθεί η βαθμίδα της γραμμικής απεικόνισης

$$f: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_3 + 3x_4 - x_5, x_1 + 2x_4 - x_5, 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5, -x_3 + x_4)$$

Άσκηση 17. Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ μια βάση του \mathbb{R}^3 και $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Να δείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 18. Έστω $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση η οποία στέλνει τα διανύσματα της κανονικής βάσης $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ του \mathbb{R}^n στα διανύσματα:

$$\{\vec{w}_1 = (0, 0, \dots, 0), \vec{w}_2 = (1, 0, \dots, 0), \vec{w}_3 = (0, 2, \dots, 0), \dots, \vec{w}_n = (0, 0, \dots, 0, n-1, 0)\}$$

αντίστοιχα, δηλαδή $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$ για $i = 1, \dots, n$. Να δείξετε ότι $f^n = 0$ και να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και την εικόνα $\text{Im}(f)$ της f .

Άσκηση 19. Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ μια βάση του \mathbb{R}^3 και έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει ότι:

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και την εικόνα $\text{Im}(f)$ της γραμμικής απεικόνισης f .

Άσκηση 20. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ η οποία ορίζεται μοναδικά από τις ακόλουθες σχέσεις

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_4, \quad f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_4) = 2\vec{e}_3 + \vec{e}_4$$

να είναι ισομορφισμός, όπου $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ είναι μια τυχούσα βάση του \mathbb{R}^4 .

Για τις τιμές του λ για τις οποίες η f δεν είναι ισομορφισμός, να βρεθούν βάσεις του πυρήνα και της εικόνας της f .

Άσκηση 21. Μια γραμμική απεικόνιση $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ καλείται **μηδενοδύναμη** αν υπάρχει $n \geq 0$ έτσι ώστε: $f^n = 0$. Να δειχθεί ότι αν η f είναι μηδενοδυναμη, τότε η απεικόνιση $\text{Id}_{\mathcal{E}} - f$ είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 22. Να βρεθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$f(4, 2, 0) = 2, \quad f(1, 2 - 3) = -7, \quad f(0, 2, 5) = 1$$

να δειχθεί ότι είναι επιμορφισμός και να βρεθεί μια βάση του πυρήνα $\text{Ker}(f)$ της.

Άσκηση 23. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f_A: \mathbb{K}_4 \rightarrow \mathbb{K}_4, \quad f_A(X) = AX$$

όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\text{Ker}(f_A)$ και την εικόνα $\text{Im}(f_A)$.

Άσκηση 24. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x], \quad f(P(x)) = P(x) - P(x)'$$

όπου $P(x)'$ συμβολίζει την παράγωγο του $P(x)$. Να δειχθεί ότι η f είναι ισομορφισμός και να προσδιοριστεί η αντίστροφή της.

Άσκηση 25. Έστω $f: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει ότι:

$$f(1) = x, \quad f(x - 1) = x^2 + 1, \quad f(1 - 2x + x^2) = 1 + x + x^2$$

Να εξετασθεί αν η f είναι ισομορφισμός. Αν ναι, να βρεθεί η απεικόνιση f^{-1} . Αν όχι, να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και την εικόνα $\text{Im}(f)$ της f .

Άσκηση 26. Έστω $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} . Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, και έστω ότι $f + g = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.

Να δείξετε ότι:

$$\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \geq n$$

Άσκηση 27. Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} και έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ διανύσματα του \mathcal{E} , όπου $k \leq n$. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνον αν υπάρχει ισομορφισμός $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, έτσι ώστε $f(\vec{e}_i) = \vec{x}_i$, $1 \leq i \leq k$.

Άσκηση 28. Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου \mathcal{E} ο οποίος έχει πεπερασμένη διάσταση. Να δειχθεί ότι το σύνολο \mathcal{B} είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις $f_i: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq k$, έτσι ώστε ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{e}_1) & f_1(\vec{e}_2) & \cdots & f_1(\vec{e}_k) \\ f_2(\vec{e}_1) & f_2(\vec{e}_2) & \cdots & f_2(\vec{e}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(\vec{e}_1) & f_k(\vec{e}_2) & \cdots & f_k(\vec{e}_k) \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 29. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση και υποθέτουμε ότι για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, τα διανύσματα \vec{x} και $f(\vec{x})$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Να δειχθεί ότι, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{K}$: $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.

Άσκηση 30. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει ότι: $f^2 = -\text{Id}_{\mathcal{E}}$.

(1) Να δειχθεί ότι η f είναι ισομορφισμός.

(2) Να δειχθεί ότι αν τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, f(\vec{x})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε και τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, f(\vec{x}), f(\vec{y})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(3) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\text{Id}_{\mathcal{E}} - f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ είναι ισομορφισμός.

Να δοθεί παράδειγμα τέτοιας γραμμικής απεικόνισης.

Άσκηση 31. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει ότι $f^n = 0$ και $f^{n-1} \neq 0$. Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{\text{Id}_{\mathcal{E}}, f, f^2, \dots, f^{n-1}\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του \mathbb{K} -διανυσματικού χώρου $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$.

Άσκηση 32. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 2n$. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$f - \text{Id}_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (f - \text{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \vec{x}$$

$$f - 2\text{Id}_{\mathcal{E}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (f - 2\text{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x}) = f(\vec{x}) - 2\vec{x}$$

Αν

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f - \text{Id}_{\mathcal{E}}) = n = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f - 2\text{Id}_{\mathcal{E}})$$

Να δειχθεί ότι:

$$\mathcal{E} = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathcal{E}}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathcal{E}})$$

Άσκηση 33. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου \mathcal{E} και \mathcal{F} είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος \mathbb{K} , και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$. Αν $\mathbf{r}(f) = 1$, να δειχθεί ότι υπάρχει ένας διανυσματικός χώρος \mathcal{G} με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{G} = 1$ και γραμμικές απεικονίσεις $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ και $h: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ έτσι ώστε:

$$f = h \circ g$$

Τι ισχύει αν $\mathbf{r}(f) > 1$;

Άσκηση 34. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ και $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις για τις οποίες ισχύει ότι:

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{και} \quad g \circ f \circ g = g$$

(1) Θέτοντας $h_1 = g \circ f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ και $h_2 = f \circ g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, να δειχθεί ότι:

$$h_1^2 = h_1 \quad \text{και} \quad h_2^2 = h_2$$

$$\text{Ker}(h_1) = \text{Ker}(f) \quad \text{και} \quad \text{Ker}(h_2) = \text{Ker}(g)$$

$$\text{Im}(h_1) = \text{Im}(g) \quad \text{και} \quad \text{Im}(h_2) = \text{Im}(f)$$

(2) Να δειχθεί ότι:

$$\mathcal{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) \quad \text{και} \quad \mathcal{F} = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f)$$

Άσκηση 35. Έστω $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου \mathcal{E} είναι ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθεί ότι:

$$\mathbf{r}(g) + \mathbf{r}(f) - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \leq \mathbf{r}(g \circ f) \leq \min \{ \mathbf{r}(g), \mathbf{r}(f) \}$$

Επιπλέον να δειχθεί ότι:

$$\mathbf{r}(f + g) \leq \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$$

και

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(g) + \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f)$$

Άσκηση 36. Έστω $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, και θεωρούμε έναν υπόχωρο \mathcal{V} του \mathcal{E} και έναν υπόχωρο \mathcal{W} του \mathcal{F} . Τότε:

(1) Αν $\text{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}$, να δειχθεί ότι:

$$\dim_{\mathbb{K}} f(\mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \mathbf{r}(f) - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} - \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f)$$

(2) Αν $\mathcal{W} \subseteq \text{Im}(f)$, τότε:

$$\dim_{\mathbb{K}} f^{-1}(\mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \mathbf{r}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}$$

Άσκηση 37. Έστω \mathcal{E} και \mathcal{F} δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος \mathbb{K} και υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n < \infty$. Έστω \mathcal{V} ένας υπόχωρος του \mathcal{E} και \mathcal{U} ένας υπόχωρος του \mathcal{F} και υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = n$. Να δειχθεί ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ έτσι ώστε:

$$\text{Ker}(f) = \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \text{Im}(f) = \mathcal{U}$$

Άσκηση 38. Έστω $f, g: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου \mathcal{E} είναι ένας \mathbb{K} -διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K} \in \{ \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \}$. Να δειχθεί ότι

$$f(\vec{x})g(\vec{x}) = 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{E} \quad \implies \quad f = 0 \quad \eta \quad g = 0$$

Τι ισχύει αν $f_i: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και $f_1(\vec{x})f_2(\vec{x}) \cdots f_n(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$;