ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Τμημα $\mathbf{B'}$ (Μ-Ω)

Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 8

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html

Παρασκευή 17 Δεκεμβρίου 2021

Άσκηση 1. *Θεωρούμε τους πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν οι πίνακες A και B έχουν την ίδια βαθμίδα. Αν αυτό ισχύει, να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας Q και ένας αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας P έτσι ώστε:

$$Q^{-1}AP = B$$

Άσκηση 2. (1) *Να βρεθούν τετραγωνικοί πίνακες A και B έτσι ώστε: $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B) \neq 0$ και $A \cdot B = O$.*

(2) *Να δοθεί παράδειγμα τετραγωνικών ισοδύναμων αλλά όχι όμοιων πινάκων.*

(3) *Έστω $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ έτσι ώστε $A^2 = O$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{r}(A) \leq \frac{1}{2}$. Επιπλέον να δειχθεί ότι:*

$$\mathbf{r}(A) = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall X \in \mathbb{K}_n : \; AX = O, \; \exists Y \in \mathbb{K}_n : \; Y = AX$$

Άσκηση 3. *Θεωρούμε έναν $m \times n$ πίνακα με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$.*

(1) *Να δειχθεί ότι $\mathbf{r}(A) = m$ αν και μόνον αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας B έτσι ώστε: $B \cdot A = I_n$.*

(2) *Να δειχθεί ότι $\mathbf{r}(A) = m$ αν και μόνον αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας C έτσι ώστε: $A \cdot C = I_m$.*

(3) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας B έτσι ώστε: $B \cdot A = I_n$ και $n \times m$ πίνακας C έτσι ώστε: $A \cdot C = I_m$ (και τότε $B = C = A^{-1}$).*

Άσκηση 4. *Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση*

$$f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

έτσι ώστε:

$$f(2,0,3) = (1,2,-1), \qquad f(4,1,5) = (4,5,-2), \qquad f(3,1,2) = (1,-1,1)$$

Ακολούθως να βρεθεί μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$ και μια βάση $\mathcal{C}$ του $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

όπου $\mathbf{r}(f) = r$.

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) *Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να υπολογισθεί ο πίνακας A^{-1}.*
(2) *Να βρείτε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ της οποίας ο πίνακας στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο A^{-1}.*
(3) *Να υπολογίσετε τον πίνακα B της f στη ακόλουθη βάση του $\mathbb{R}^3$:*

$$\{\vec{\varepsilon}_1 = (1,1,1),\ \ \vec{\varepsilon}_2 = (1,-1,0),\ \ \vec{\varepsilon}_3 = (1,1,-2)\}$$

(4) *Να προσδιορίσετε αντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιο ώστε:*

$$B = P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P$$

(5) *Να υπολογίσετε τον πίνακα A^n, $\forall n \geq 1$.*

Άσκηση 6. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως εξής :*

$$f(x,y,z) = \left(\frac{19}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{13}{4}z,\ \ \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}y - \frac{11}{4}z,\ \ 3x + y - 4z\right)$$

(1) *Να βρείτε τον πίνακα A της f στην ακόλουθη (κανονική) βάση του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$

(2) *Να βρείτε τον πίνακα B της f στη βάση στην ακόλουθη βάση του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{C} = \{(2,1,1),\ (1,2,1),\ (1,1,2)\}$$

(3) *Να προσδιορίσετε αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε*

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Άσκηση 7. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z,w) = (x+z, y+w)$.*
(1) *Να βρείτε τον πίνακα A της f στις βάσεις*

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0),\ \ (0,1,0,0),\ \ (0,0,1,0),\ \ (0,0,0,1)\} \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{C} = \{(1,0),\ \ (0,1)\}$$

(2) *Να βρείτε τον πίνακα B της f στις βάσεις*

$$\mathcal{B}' = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \ (0,1,0,0),\ \ (0,0,1,0),\ \ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\} \qquad \textit{και} \qquad \mathcal{C}' = \{(1,1),\ \ (1,-1)\}$$

(3) *Να βρείτε αντιστρέψιμους πίνακες P και Q έτσι ώστε:*

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

Άσκηση 8. *Έστω η γραμμική απεικόνιση*

$$f\ :\ \mathbb{R}^3 \ \longrightarrow\ \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (-x+y-z,\ \ x+2y,\ \ -y+3z)$$

Να δείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός και να βρεθεί ο πίνακας της f^{-1} στην βάση

$$\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1,1,1),\ \ \vec{\varepsilon}_2 = (1,1,0),\ \ \vec{\varepsilon}_3 = (1,0,0)\}$$

Άσκηση 9. *Έστω η γραμμική απεικόνιση*

$$f\ :\ \mathbb{R}^3 \ \longrightarrow\ \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x+y,\ \ y+z,\ \ z+x)$$

Αν A είναι ο πίνακας της f στη κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$, να βρεθεί γραμμική απεικόνιση g έτσι ώστε:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = A^{-1}$$

Άσκηση 10. *Έστω η γραμμική απεικόνιση*

$$f\,:\,\mathbb{R}^3 \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x+3y-z,\;\; 2x-y,\;\; y+2z)$$

Αν $\mathcal{B}$ *είναι η κανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$ *και*

$$\mathcal{C} = \big\{(1,-1,0),\;\; (0,1,2),\;\; (1,0,1)\big\}$$

και αν $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ *και* $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$, *να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας* P *έτσι ώστε:*

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Άσκηση 11. *Έστω* $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *η κανονική βάση του* $\mathbb{R}^3$ *και* $f\,:\,\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε*

$$f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_3) = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$$

Να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ *της* f *όπου*

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\varepsilon}_1 = (3,0,-1),\;\; \vec{\varepsilon}_2 = (1,2,0),\;\; \vec{\varepsilon}_3 = (-1,3,1)\big\}$$

Άσκηση 12. *Έστω η γραμμική απεικόνιση* $f\,:\,\mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \;\longrightarrow\; \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = A \cdot X$, *όπου:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας της f *στη κανονική βάση του* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$. *Είναι η* f *ισομορφισμός ;*

Άσκηση 13. *Έστω η γραμμική απεικόνιση*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y,z) = (x,y)$$

Έστω $\mathcal{B}$ *και* $\mathcal{C}$ *οι κανονικές βάσεις των* $\mathbb{R}^3$ *και* $\mathbb{R}^2$. *Θεωρούμε τις βάσεις*

$$\mathcal{B}' = \big\{(1,-1,0),\;\; (1,0,-1),\;\; (1,1,1)\big\} \quad \textit{και} \quad \mathcal{C}' = \big\{(4,3),\;\; (3,2)\big\}$$

Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *και αντιστρέψιμος* $Q \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R})$ *έτσι ώστε*

$$P^{-1} \cdot A \cdot Q = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)$$

Άσκηση 14. *Θεωρούμε τις ακόλουθες βάσεις του* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1 = (1,1,-1),\;\; \vec{e}_2 = (0,0,1),\;\; \vec{e}_3 = (1,0,1)\big\}$$

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{\varepsilon}_1 = (2,0,1),\;\; \vec{\varepsilon}_2 = (1,1,0),\;\; \vec{\varepsilon}_3 = (0,1,-1)\big\}$$

Αν $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

να βρεθεί ο πίνακας $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.

Άσκηση 15. *Έστω η γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathsf{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_0 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί μια βάση $\mathcal{B}$ *του* $\mathbb{R}_2[t]$ *και μια βάση* $\mathcal{C}$ *του* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ *έτσι ώστε:*

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

όπου $r = \mathbf{r}(f)$.

Άσκηση 16. *Έστω*

$$f \colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

μια γραμμική απεικόνιση και $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ *μια βάση του* $\mathbb{R}^4$. *Υποθέτουμε ότι ο πίνακας* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ *της* f *ως προς τη βάση* $\mathcal{B}$ *είναι ο*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας $C = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}$ *της* f *ως προς τη βάση* $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_4\}$ *και ο πίνακας* $D = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}$ *της* f *ως προς τη βάση* $\mathcal{D} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, +\vec{e}_4\}$.

Άσκηση 17. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση*

$$D \colon \mathbb{R}_n[t] \longrightarrow \mathbb{R}_n[t], \quad D(P(t)) = P'(t)$$

(1) *Να βρεθεί ο πίνακας* $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D)$ *της* D *ως προς τη βάση*

$$\mathcal{B} = \{1,\ t,\ t^2,\ t^3,\ \cdots,\ t^n\}$$

(2) *Να βρεθεί ο πίνακας* $B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D)$ *της* D *ως προς τη βάση*

$$\mathcal{C} = \left\{1,\ t - \lambda,\ \frac{(t-\lambda)^2}{2!},\ \frac{(t-\lambda)^3}{3!},\ \cdots,\ \frac{(t-\lambda)^n}{n!},\right\}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) *Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας* P *έτσι ώστε*

$$P^{-1} A P = B$$

Άσκηση 18. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$, *και έστω* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ *ένας υπόχωρος του* $\mathcal{E}$. *Θεωρούμε μια γραμμική απεικόνιση* $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$.

(1) *Να δειχθεί ότι*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} + \dim_{\mathbb{K}} f(\mathcal{E}) \ \leq \ \dim_{\mathbb{K}} f(\mathcal{V}) \ \leq \ \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$$

(2) *Να δειχθεί ότι*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} \ \leq \ \dim_{\mathbb{K}} f^{-1}(\mathcal{V}) \ \leq \ \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} f(\mathcal{E})$$

Άσκηση 19. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$, *και έστω* $f, g \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *δύο γραμμικές απεικονίσεις. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \ \leq \ \mathbf{r}(g \circ f) \ \leq \ \min\{\mathbf{r}(f),\, \mathbf{r}(g)\}$$

Άσκηση 20. *Έστω* A *και* B *δύο* $n \times n$ *πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι:*

$$\mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B) - n \ \leq \ \mathbf{r}(AB) \ \leq \ \min\{\mathbf{r}(A),\, \mathbf{r}(B)\}$$