ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 1

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html

Παρασκευή 15 Οκτωβρίου 2021

Υπενθυμίζουμε ότι $\mathbb{K}$ συμβολίζει ένα σώμα, συνήθως ένα εκ των $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ συμβολίζεται με $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Για λόγους απλότητας, το σύνολο όλων τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ συμβολίζεται με $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$.

Ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας συμβολίζεται με O και ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας συμβολίζεται με I_n.

Άσκηση 1. *Να γράψετε αναλυτικά τον 6×6 πίνακα $A = (a_{ij})$ όπου $a_{ij} = \min\{i, j\} + i - j$.*

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$A = \begin{pmatrix} 1+1-1 & 1+1-2 & 1+1-3 & 1+1-4 & 1+1-5 & 1+1-6 \\ 1+2-1 & 2+2-2 & 2+2-3 & 2+2-4 & 2+2-5 & 2+2-6 \\ 1+3-1 & 2+3-2 & 3+3-3 & 3+3-4 & 3+3-5 & 3+3-6 \\ 1+4-1 & 2+4-2 & 3+4-3 & 4+4-4 & 4+4-5 & 4+4-6 \\ 1+5-1 & 2+5-2 & 3+5-3 & 4+5-4 & 5+5-5 & 5+5-6 \\ 1+6-1 & 2+6-2 & 3+6-3 & 4+6-4 & 5+6-5 & 6+6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2. *Δίνονται οι πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Να εκτελεστούν, όπου είναι δυνατόν, οι ακόλουθοι πολλαπλασιασμοί πινάκων:

$$A \cdot B, \quad B \cdot A, \quad A \cdot C, \quad C \cdot A, \quad B \cdot C, \quad C \cdot D, \quad D \cdot C, \quad C \cdot E, \quad E \cdot C$$

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot C = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot C = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad C \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Τα γινόμενα πινάκων $B \cdot A$, $C \cdot A$, $C \cdot D$, και $E \cdot C$ δεν ορίζονται.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ καλείται **αντιστρέψιμος**, αν υπάρχει $n \times n$ πίνακας B με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ έτσι ώστε $AB = I_n = BA$. Σ' αυτή την περίπτωση ο πίνακας B είναι μοναδικός, συμβολίζεται με A^{-1} και καλείται ο **αντίστροφος** του πίνακα A.

Άσκηση 3. *Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και*

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

να δειχθεί ότι οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι πίνακες A^{-1} και B^{-1}, και να δειχθεί ότι:

$$AB = BA$$

Λύση. *Θεωρούμε τους πίνακες*

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

Θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos x)^2 + (\sin x)^2 & -\sin x \cos x + \sin x \cos x \\ \sin x \cos x - \sin x \cos x & (\sin x)^2 + (\cos x)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos x)^2 + (\sin x)^2 & -\sin x \cos x + sinx \cos x \\ \sin x \cos x - \sin x \cos x & (\sin x)^2 + (\cos x)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Επομένως ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Παρόμοια ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

Τέλος θα έχουμε:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & \cos x \sin y + \sin x \cos y \\ -\sin x \cos y - \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

Παρόμοια:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y \cos x - \sin y \sin x & \cos y \sin x + \sin y \cos x \\ -\sin y \cos x - \cos y \sin x & -\sin y \sin x + \cos y \cos x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

Άρα $A \cdot B = B \cdot A$.

Σχόλιο. *Στην παραπάνω Άσκηση χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές ταυτότητες:*

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad \text{και} \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τους πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Να προσδιοριστεί 3×3 πίνακας X, ο οποίος να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$A + 3X = 2(X - B)$$

Λύση. *Έστω ότι υπάρχει* 3×3 *πίνακας*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε $A + 3X = 2(X - B)$. *Θα έχουμε τότε:*

$$A + 3X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_{11} & 3x_{12} & 3x_{13} \\ 3x_{21} & 3x_{22} & 3x_{23} \\ 3x_{31} & 3x_{32} & 3x_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3x_{11} & 3x_{12} & 3x_{13} + 1 \\ 3x_{21} & 3x_{22} + 1 & 3x_{23} \\ 3x_{31} & 3x_{32} & 3x_{31} + 1 \end{pmatrix}$$

$$2(X - B) = 2X - 2B = 2 \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_{11} & 2x_{12} & 2x_{13} \\ 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} \\ 2x_{31} & 2x_{32} & 2x_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_{11} - 2 & 2x_{12} - 2 & 2x_{13} - 2 \\ 2x_{21} - 2 & 2x_{22} - 2 & 2x_{23} - 2 \\ 2x_{31} - 2 & 2x_{32} - 2 & 2x_{33} - 2 \end{pmatrix}$$

Άρα θα πρέπει να έχουμε

$$\begin{pmatrix} 3x_{11} & 3x_{12} & 3x_{13} + 1 \\ 3x_{21} & 3x_{22} + 1 & 3x_{23} \\ 3x_{31} & 3x_{32} & 3x_{31} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_{11} - 2 & 2x_{12} - 2 & 2x_{13} - 2 \\ 2x_{21} - 2 & 2x_{22} - 2 & 2x_{23} - 2 \\ 2x_{31} - 2 & 2x_{32} - 2 & 2x_{33} - 2 \end{pmatrix}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$3x_{11} = 2x_{11} - 2 \implies x_{11} = -2, \quad 3x_{12} = 2x_{12} - 2 \implies x_{12} = -2, \quad 3x_{13} + 1 = 2x_{13} - 2 \implies x_{13} = -3$$

$$3x_{21} = 2x_{21} - 2 \implies x_{21} = -2, \quad 3x_{22} + 1 = 2x_{22} - 2 \implies x_{22} = -3, \quad 3x_{23} = 2x_{23} - 2 \implies x_{23} = -2$$

$$3x_{31} = 2x_{31} - 2 \implies x_{31} = -2, \quad 3x_{32} = 2x_{32} - 2 \implies x_{32} = -2, \quad 3x_{33} + 1 = 2x_{33} - 2 \implies x_{33} = -3$$

Επομένως αν υπάρχει τέτοιος 3×3 *πίνακας* X, *τότε*

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Αντίστροφα, εύκολα βλέπουμε ίτι ο παραπάνω πίνακας ικανοποιεί τη σχέση $A + 3X = 2(X - B)$.

Θα μπορούσαμε να εργαστούμε και ως εξής: Από τη ζητούμενη σχέση $A + 3X = 2(X - B)$, *θα έχουμε:*

$$A + 3X = 2(X - B) \implies A + 3X = 2X - 2B \implies 3X - 2X = -A - 2B \implies X = -A - 2B =$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5. *Για κάθε* $m, n \in \mathbb{N}$ *και για κάθε* $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$, *θεωρούμε τους πίνακες:*

$$E_{ij} \in \mathsf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), \quad \text{όπου} \quad (E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = i \ \& \ l = j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Με άλλα λόγια ο πίνακας E_{ij} *είναι ο* $m \times n$ *πίνακας ο οποίος έχει κάθε στοιχείο του ίσο με* 0 *εκτός από το στοιχείο του στη θέση* (i, j) *το οποίο είναι ίσο με* 1.

(1) *Να δειχθεί ότι για κάθε* $m \times n$ *πίνακα* $A = (a_{ij})$ *ισχύει ότι:*

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

(2) *Για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ να προσδιοριστούν οι πίνακες*

$$A \cdot E_{ij}, \quad \text{όπου} \quad E_{ij} \in \mathsf{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$$

$$E_{ij} \cdot A, \quad \text{όπου} \quad E_{ij} \in \mathsf{M}_{s\times m}(\mathbb{K})$$

Λύση. (1) *Θα έχουμε:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{1n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{2n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$+a_{m1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{m2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{mn} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{gathered} = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \cdots + a_{1n}E_{1n} + \\ +a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22} + \cdots + a_{2n}E_{2n} + \\ \vdots \\ +a_{m1}E_{m1} + a_{m2}E_{m2} + \cdots + a_{mn}E_{mn} = \\ = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} \end{gathered}$$

Επομένως δείξαμε ότι

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

(2) *Θεωρούμε έναν $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ και τον $n \times t$ πίνακα E_{ij} ο οποίος έχει κάθε στοιχείο του ίσο με 0 εκτός από το στηχείο στην i-γραμμή και στην j-στήλη το οποίο είναι ίσο με 1. Τότε ο πίνακας $A \cdot E_{ij}$ είναι ο $m \times t$ πίνακας:*

$$A \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ii} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου τα στοιχεία $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ii} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ *βρίσκονται στην j-στήλη.*

Παρόμοια αν θεωρήσουμε τον $s \times m$ πίνακα E_{ij} ο οποίος έχει κάθε στοιχείο του ίσο με 0 εκτός από το στοιχείο στην i-γραμμή και στην j-στήλη το οποίο είναι ίσο με 1, τότε ο πίνακας $E_{ij} \cdot A$ είναι ο $s \times n$ πίνακας:

$$E_{ij} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου τα στοιχεία

$$\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix}$$

βρίσκονται στην i-γραμμή.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, τότε ορίζονται οι δυνάμεις A^n, $\forall n \geq 0$, του A επαγωγικά ως εξής:

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, \quad \cdots \quad A^{n+1} = A^n \cdot A$$

Ο πίνακας A^n καλείται η n-**οστή δύναμη** του A. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$A^n \cdot A^m = A^{n+m}, \qquad (A^n)^m = A^{nm}$$

Άσκηση 6. *Να εξετασθεί αν ισχύει η ακόλουθη σχέση στο σύνολο $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$:*

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A+B)^3 = (A+B)^2\cdot(A+B) = (A^2+AB+BA+B^2)\cdot(A+B) = A^3+A^2B+ABA+AB^2+BA^2+BAB+B^2A+B^3$$

Αν $AB = BA$, τότε προφανώς θα έχουμε και $BA^2 = A^2B$ και $B^2A = AB^2$, και επομένως από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$(A+B)^3 = A^3+A^2B+ABA+AB^2+BA^2+BAB+B^3 = A^3+A^2B+A^2B+AB^2+BA^2+AB^2+B^2A+B^3 =$$
$$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Θα δείξουμε με ένα παράδειγμα ότι αν $AB \neq BA$, τότε γενικά:

$$(A+B)^3 \neq A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Θεωρούμε τους 2×2 πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και επιλέον:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A+B$$

Άρα

$$(A+B)^3 = A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Από την άλλη πλευρά υπολογίζουμε:

$$A^2 = A \quad \textit{και άρα} \quad A^3 = A^2\cdot A = A^2 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \quad \textit{και άρα} \quad B^3 = O$$

$$A^2\cdot B = A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \quad \textit{και} \quad AB^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Άρα

$$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 = A+3B+3O+O = A+3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$(A+B)^3 = A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Άσκηση 7. *Θεωρούμε τους πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστεί ο πίνακας $A^{2018}\cdot B$.

Λύση. *Υπολογίζουμε πρώτα την n-οστή δύναμη του πίνακα A. Θα έχουμε:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ισχυρισμός: *Για κάθε* $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n 2n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού, παρατηρούμε ότι η σχέση $(*)$ *είναι αληθής για* $n = 1, 2, 3, 4$. *Υποθέτουμε ότι η σχέση* $(*)$ *ισχύει για* $n = k$, *όπου* $k \geq 2$. *Τότε θα έχουμε:*

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} (-1)^k & -(-1)^k 2k \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 2(-1)^k + (-1)^k 2k \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & (-1)^k 2(k+1) \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & -(-1)^{k+1} 2(k+1) \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}$$

Επομένως η σχέση $(*)$ *ισχύει και για* $n = k+1$. *Σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, συμπεραίνουμε ότι η σχέση* $(*)$ *ισχύει για κάθε* $n \geq 1$.

Τότε θα έχουμε:

$$A^n \cdot B = \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n 2n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ιδιαίτερα, θέτοντας $n = 2018$, *έπεται ότι:*

$$A^{2018} \cdot B = \begin{pmatrix} (-1)^{2018} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B$$

Άσκηση 8. *Να υπολογιστεί η* n*-οστή δύναμη* A^n *του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Υπολογίζουμε πρώτα τους πίνακες* A^n, *όπου* $n = 1, 2, 3, 4$. *Θα έχουμε:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ισχυρισμός: *Για κάθε* $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2n-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού, παρατηρούμε ότι η σχέση $(*)$ *είναι αληθής για* $n = 1, 2, 3, 4$. *Υποθέτουμε ότι η σχέση* $(*)$ *ισχύει για* $n = k$, *όπου* $k \geq 2$. *Τότε θα έχουμε:*

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2(k+1)-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως η σχέση $(*)$ ισχύει και για $n = k+1$. Σύμφωνα με την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής, συμπεραίνουμε ότι η σχέση $(*)$ ισχύει για κάθε $n \geq 1$. Άρα θα έχουμε:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2n-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το **ίχνος** $\mathsf{Tr}(A)$ ένός τετραγωνικού πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ ορίζεται να είναι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του:

$$\mathsf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\mathsf{Tr}(A+B) = \mathsf{Tr}(A) + \mathsf{Tr}(B), \quad \text{και} \quad \mathsf{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathsf{Tr}(A)$$

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ο **ανάστροφος** ${}^tA$ ενός $m \times n$ πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ορίζεται να είναι ο $n \times m$ πίνακας ${}^tA \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, όπου:

$$({}^tA)_{ij} = (A)_{ji}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad \text{και} \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$$

Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ καλείται **συμμετρικός** αν και μόνον αν ${}^tA = A$, δηλαδή ισχύει ότι: $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Άσκηση 9. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι:*

$$\mathsf{Tr}(A \cdot B) = \mathsf{Tr}(B \cdot A)$$

Ως εφαρμογή να δειχθεί ότι για κάθε αντιστρέψιμο $n \times n$ πίνακα P και κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει ότι:

$$\mathsf{Tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \mathsf{Tr}(A)$$

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$\mathsf{Tr}(A\cdot B) = \sum_{k=1}^{n}(A\cdot B)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}(A)_{kl}(B)_{lk}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}(B)_{lk}(A)_{kl}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(B)_{lk}(A)_{kl} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(B)_{lk}(A)_{kl} = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(B)_{lk}(A)_{kl}\right) = \sum_{l=1}^{n}(B\cdot A)_{ll} = \mathsf{Tr}(B\cdot A)$$

Αν P είναι ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας, τότε χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, θα έχουμε για κάθε κάθε $n \times n$ πίνακα A:

$$\mathsf{Tr}(P^{-1}\cdot A\cdot P) = \mathsf{Tr}\big(P^{-1}\cdot(A\cdot P)\big) = \mathsf{Tr}\big((A\cdot P)\cdot P^{-1}\big) = \mathsf{Tr}\big(A\cdot(P\cdot P^{-1})\big) = \mathsf{Tr}(A\cdot I_n) = \mathsf{Tr}(A)$$

Άσκηση 10. *Να εξετασθεί αν για τυχόντες τετραγωνικούς πίνακες $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\mathsf{Tr}(A\cdot B) = \mathsf{Tr}(A)\mathsf{Tr}(B) \quad \textit{και} \quad \mathsf{Tr}({}^tA) = \mathsf{Tr}(A)$$

Λύση. *Θεωρούμε τους πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\mathsf{Tr}(A) = 0 \quad \textit{και} \quad \mathsf{Tr}(B) = -1$$

Επομένως:

$$\mathsf{Tr}(A)\cdot\mathsf{Tr}(B) = 0 \qquad (*)$$

Από την άλλη πλευρά έχουμε:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$\mathsf{Tr}(A \cdot B) = 1 \tag{$**$}$$

Από τις σχέσεις $(*)$ *και* $(**)$ *έπεται ότι:*

$$\mathsf{Tr}(A \cdot B) = 1 \neq 0 = \mathsf{Tr}(A)\mathsf{Tr}(B)$$

Αν $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, *τότε* $\mathsf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. *Επειδή τα διαγώνια στοιχεία του αναστρόφου* ${}^tA$ *του* A *συμπίπτουν με τα διαγώνια στοιχεία του* A, *θα έχουμε* $\mathsf{Tr}({}^tA) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. *Επομένως:* $\mathsf{Tr}({}^tA) = \mathsf{Tr}(A)$.

Άσκηση 11. *Έστω* $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ *δύο* $n \times n$ *πίνακες με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$. *Να δειχθεί ότι:*

$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$$

Λύση. *Έστω* $A = (a_{ij})$ *και* $B = (b_{ij})$. *Τότε, για κάθε* $i, j = 1, 2, \cdots, n$, *θα έχουμε*

$$\Big({}^t(A \cdot B)\Big)_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = \sum_{k=1}^n (A)_{jk}(B)_{ki} = \sum_{k=1}^n (B)_{ki}(A)_{jk} = \sum_{k=1}^n ({}^tB)_{ik}({}^tA)_{kj} = \Big({}^tB \cdot {}^tA\Big)_{ij}$$

Επομένως θα έχουμε ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

Άσκηση 12. *Θεωρούμε τους* $n \times 1$ *πίνακες* $A, B \in \mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

(1) *Να δειχθεί ότι:*

$${}^tA \cdot B = {}^tB \cdot A$$

(2) *Να δειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα ότι:*

$$A \cdot {}^tB \neq B \cdot {}^tA$$

(3) *Να δειχθεί ότι:*

$$\mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB) = {}^tA \cdot B$$

(4) *Να δειχθεί ότι:*

$${}^tA \cdot A = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = O$$

(5) *Να δειχθεί ότι:*

$$A \cdot {}^tA = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = O$$

Λύση. *Οι πίνακες* A *και* B *είναι της μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

και επομένως

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad {}^tB = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

(1) *Ο πίνακας* ${}^tA \cdot B$ *είναι μεγέθους* 1×1 *και:*

$${}^tA \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_ib_i$$

Παρόμοια ο πίνακας ${}^tB \cdot A$ *είναι μεγέθους* 1×1 *και*

$$ {}^tB \cdot A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots b_na_n = \sum_{i=1}^{n} b_ia_i $$

Επειδή $a_ib_i = b_ia_i, \forall i = 1, 2, \cdots, n$, *θα έχουμε:*

$$ {}^tA \cdot B = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i = \sum_{i=1}^{n} b_ia_i = {}^tB \cdot A $$

(2) *Ο πίνακας* $A \cdot {}^tB$ *είναι μεγέθους* $n \times n$ *και:*

$$ \left(A \cdot {}^tB\right)_{ij} = (A)_{i1}({}^tB)_{1j} = (A)_{i1}(B)_{j1} = a_{i1}b_{j1} $$

Επομένως ο $n \times n$ *πίνακας* $A \cdot {}^tB$ *είναι ο εξής:*

$$ A \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_n & a_nb_n & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} $$

Παρόμοια, ο πίνακας $B \cdot {}^tA$ *είναι μεγέθους* $n \times n$ *και:*

$$ \left(B \cdot {}^tA\right)_{ij} = (B)_{i1}({}^tA)_{1j} = (B)_{i1}(A)_{j1} = b_ia_j $$

Επομένως ο $n \times n$ *πίνακας* $A \cdot {}^tB$ *είναι ο εξής:*

$$ B \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{pmatrix} $$

Παρατηρούμε ότι γενικά $\left(A \cdot {}^tB\right)_{ij} = a_ib_j \neq b_ia_j = \left(B \cdot {}^tA\right)_{ij}$ *και επομένως* $A \cdot {}^tB = B \cdot {}^tA$. *Για παράδειγμα, έστω*

$$ A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} $$

Τότε:

$$ A \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} $$

και

$$ B \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} $$

Προφανώς $A \cdot {}^tB = B \cdot {}^tA$ *αν και μόνον αν* $n = 1$.

(3) *Από τους υπολογισμούς που κάναμε στο μέρος* (2) *προκύπτει ότι*

$$ \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i = \sum_{i=1}^{n} b_ia_i = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n = \sum_{i=1}^{n} b_ia_i = \mathsf{Tr}(B \cdot {}^tA) $$

(4) *Έστω ότι* ${}^tA \cdot A = O$. *Τότε όπως στο μέρος (1) θα έχουμε:*

$$0 = {}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1a_1 + a_2a_2 + \cdots a_na_n = a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

Επειδή προφανώς $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$ *αν και μόνον αν* $a_i = 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$, *έπεται ότι:*

$${}^tA \cdot A = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = O$$

(5) *Έστω ότι* $A \cdot {}^tA = O$. *Από τους υπολογισμούς που κάναμαε στο μέρος (2) προκύπτει ότι:*

$$O = A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_n & a_na_n & \cdots & a_na_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_n & a_na_n & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

Ιδιαίτερα θα έχουμε $a_i^2 = 0$, *δηλαδή* $a_i = 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$, *και επομένως* $A = O$.

Παρατήρηση. *Θεωρούμε τους* $n \times 1$ *πίνακες* $A, B \in \mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. *Τότε, όπως προκύπτει από την παραπάνω Άσκηση:*

$${}^tA \cdot B = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tB) = \mathsf{Tr}(B \cdot {}^tA) = {}^tB \cdot A$$

Άσκηση 13. (1) *Αν* $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, *να εξετασθεί αν ισχύει ότι:* $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A$.

(2) *Αν* $A \in \mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, *να δειχθεί ότι:*

(α΄) *Οι πίνακες* $A \cdot {}^tA$ *και* ${}^tA \cdot A$ *είναι συμμετρικοί.*

(β΄) $\mathsf{Tr}({}^tA \cdot A) = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tA)$.

(γ΄) *Ο αριθμός* $\mathsf{Tr}({}^tA \cdot A)$ *είναι μη-αρνητικός και:* $\mathsf{Tr}({}^tA \cdot A) = 0 \iff A = O$.

Λύση. (1) *Έστω* $A = (a_{ij})$. *Για τους* $n \times n$ *πίνακες* $A \cdot {}^tA$ *και* ${}^tA \cdot A$, *θα έχουμε:*

$$(A \cdot {}^tA)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik}(A)_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn}$$

$$({}^tA \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^n ({}^tA)_{ik}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^n (A)_{ki}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj}$$

Θεωρούμε τον $n \times n$ *πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και τότε} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Θα έχουμε:

$$A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

και

$${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A$ *αν και μόνον αν* $n = 1$.

(2) (α') *Ο πίνακας $A \cdot {}^tA$ είναι συμμετρικός αν και μόνον αν ${}^t(A \cdot {}^tA) = A \cdot {}^tA$. Επειδή*

$$ {}^t(A \cdot {}^tA) = {}^t({}^tA) \cdot {}^tA = A \cdot {}^tA $$

έπεται ότι ο πίνακας $A \cdot {}^tA$ είναι συμμετρικός.
Παρόμοια, ο πίνακας ${}^tA \cdot A$ είναι συμμετρικός αν και μόνον αν ${}^t({}^tA \cdot A) = {}^tA \cdot A$. Επειδή

$$ {}^t({}^tA \cdot A) = {}^tA \cdot {}^t({}^tA) = {}^tA \cdot A $$

έπεται ότι ο πίνακας ${}^tA \cdot A$ είναι συμμετρικός.

(β') *Επειδή, για τυχόντες $n \times n$ πίνακες A και B ισχύει ότι $\mathsf{Tr}(A \cdot B) = \mathsf{Tr}(B \cdot A)$, θα έχουμε:* $\mathsf{Tr}({}^tA \cdot A) = \mathsf{Tr}(A \cdot {}^tA)$.

(γ') *Έστω $A = (a_{ij})$. Τότε θα έχουμε:*

$$ \mathsf{Tr}({}^tA \cdot A) = \sum_{k=1}^{n} ({}^tA \cdot A)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} ({}^tA)_{kl}(A)_{lk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} (A)_{lk}(A)_{lk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{lk}a_{lk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{lk}^2 $$

Επομένως ο αριθμός $\mathsf{Tr}({}^tA \cdot A)$, ως άθροισμα τετραγώνων, είναι μη-αρνητικός και προφανώς:

$$ \mathsf{Tr}({}^tA \cdot A) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{lk}^2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad a_{lk} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad A = O $$

Άσκηση 14. *Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, να δειχθεί ότι $A^2 - 2A - 8I_2 = 0$. Επιπλέον να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο πίνακας A^{-1}.*

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} $$

και άρα:

$$ A^2 - 2A - 8I_2 = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} 14-6-8 & -2+2+0 \\ -10+10+0 & 6+2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O} $$

Τέλος θα έχουμε

$$ A^2 - 2A - 8I_2 = \mathbb{O} \implies A^2 - 2A = 8I_2 \implies A(A - 2I_2) = 8I_2 \implies A \cdot \frac{1}{8}(A - 2I_2) = I_2 = \frac{1}{8}(A - 2I_2) \cdot A $$

Επομένως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$ A^{-1} = \frac{1}{8}(A - 2I_2) = \frac{1}{8}A - \frac{1}{4}I_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} - \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} $$

Σχόλιο. *Η παρακάτω Άσκηση είναι γενίκευση της Άσκησης 14.*

Άσκηση 15. *Έστω*

$$ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} $$

ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι[1]*:*

$$ A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O $$

Να συμπεράνετε ότι:

$$ \text{ο πίνακας } A \text{ είναι αντιστρέψιμος} \quad\Longleftrightarrow\quad ad - bc \neq 0 $$

[1] Ο αριθμός $a + d$ είναι το ίχνος $\mathsf{Tr}(A)$ του A, και ο αριθμός $ad - bc$ καλείται **ορίζουσα** του A και συμβολίζεται με $|A|$ ή $\mathsf{Det}(A)$.

και τότε:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\Big(-A + (a+d)I_2 \Big) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ac-bd & 0 \\ 0 & ac-bd \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd \\ ac+cd-ac-cd & cb+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Άρα πράγματι έχουμε:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$A^2 - (a+d)A = -(ad-bc)I_2 \quad \Longrightarrow \quad A \cdot \big(A - (a+d)I_2\big) = -(ad-bc)I_2 = \big(A-(a+d)I_2\big)\cdot A \quad (*)$$

• *Υποθέτουμε ότι $ad-bc \neq 0$. Τότε πολλαπλασιάζοντας βαθμωτά και τα δύο μέλη της ισότητας πινάκων $(*)$ με τον αριθμό $\frac{-1}{ad-bc}$, θα έχουμε:*

$$A \cdot \Big(\frac{a+d}{ad-bc}I_2 - \frac{1}{ad-bc}A\Big) = I_2 = \Big(\frac{a+d}{ad-bc}I_2 - \frac{1}{ad-bc}A\Big)\cdot A$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \frac{a+d}{ad-bc}I_2 - \frac{1}{ad-bc}A = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{ad-bc} & 0 \\ 0 & \frac{a+d}{ad-bc} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{a}{ad-bc} & \frac{b}{ad-bc} \\ \frac{c}{ad-bc} & \frac{d}{ad-bc} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

• *Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1}. Αν $ad-bc=0$, τότε από τη σχέση $(*)$ θα έχουμε:*

$$A \cdot \big(A - (a+d)I_2\big) = O$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με A^{-1}, έπεται ότι:

$$A^{-1}\cdot A \cdot \big(A-(a+d)I_2\big) = A^{-1}\cdot O \quad \Longrightarrow \quad I_2 \cdot \big(A-(a+d)I_2\big) = O \quad \Longrightarrow \quad A-(a+d)I_2 = O \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad A = (a+d)I_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = a+d \\ b=0 \\ c=0 \\ a+d=d \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} d=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ a=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A = O$$

Αυτό όμως είναι άτοπο διότι ο μηδενικός πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος. Στην αντίφαση αυτή καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $ad-bc=0$. Άρα θα έχουμε: $ad-bc=0$.

Άσκηση 16. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Ας είναι $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K})$ (αντιστοίχως $\mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$) το σύνολο των άνω (αντιστοίχως κάτω) τριγωνικών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$.*

Να δειχθεί ότι η τομή $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$ των δύο αυτών συνόλων ισούται με το σύνολο των διαγωνίων πινάκων.

Λύση. *Συμβολίζουμε με $\Delta_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των διαγωνίων πινάκων. Ένα τυπικό στοιχείο του συνόλου αυτού είναι της μορφής:*

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

όπου $k_i \in \mathbb{K},\ 1 \leq i \leq n$.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$, δηλαδή $A \in \mathsf{AT}_n(\mathbb{K})$ και $A \in \mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$. Αφού ο πίνακας A είναι άνω και κάτω τριγωνικός έπεται ότι κάτω και πάνω από την κύρια διαγώνιο έχει μηδέν. Συνεπώς, ο πίνακας $A \in \Delta_n(\mathbb{K})$ και άρα δείξαμε ότι $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{KT}_n(\mathbb{K}) \subseteq \Delta_n(\mathbb{K})$. Επίσης είναι φανερό ότι αν έχουμε έναν διαγώνιο πίνακα τότε αυτός είναι άνω και κάτω τριγωνικός, δηλαδή $\Delta_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$. Επομένως $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{KT}_n(\mathbb{K}) = \Delta_n(\mathbb{K})$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας A καλείται **ταυτοδύναμος** αν $A^2 = A$. Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

είναι ταυτοδύναμος.

Άσκηση 17. (1) *Να δειχθεί ότι αν ο πίνακας $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ είναι ταυτοδύναμος, τότε και ο πίνακας $I_n - A$ είναι ταυτοδύναμος.*

(2) *Να βρεθούν όλοι οι ταυτοδύναμοι και αντιστρέψιμοι πίνακες.*

(3) *Υποθέτουμε ότι για τους πίνακες (κατάλληλων μεγεθών) A και B ισχύει ότι: $AB = A$ και $BA = B$. Να δειχθεί ότι οι πίνακες A και B είναι ταυτοδύναμοι.*

Λύση. (1) *Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες πράξεων πινάκων, θα έχουμε:*

$$(I_n - A) \cdot (I_n - A) = (I_n)^2 - I_n \cdot A - A \cdot I_n + A^2 = I_n - A - A + A = I_n - A$$

Άρα ο πίνακας $I_n - A$ είναι ταυτοδύναμος.

(2) *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας ο οποίος είναι ταυτοδύναμος και αντιστρέψιμος. Τότε θα έχουμε $A^2 = A$ και $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$. Επομένως πολλαπλασιάζοντας τη σχέση $A^2 = A$ από τα αριστερά με τον πίνακα A^{-1}, θα έχουμε:*

$$A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} \cdot A \implies A^{-1} \cdot A \cdot A = I_n \implies I_n \cdot A = I_n \implies A = I_n$$

Αντίστροφα ο μοναδιαίος πίνακας I_n είναι προφανώς αντιστρέψιμος και ταυτοδύναμος.

(3) *Υποθέτουμε ότι $AB = A$ και $BA = B$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις θα έχουμε:*

$$A \cdot B = A \implies (A \cdot B) \cdot A = A \cdot A \implies A \cdot (B \cdot A) = A^2 \implies A \cdot B = A^2 \implies A = A^2$$

$$B \cdot A = B \implies (B \cdot A) \cdot B = B \cdot B \implies B \cdot (A \cdot B) = B^2 \implies B \cdot A = B^2 \implies B = B^2$$

Επομένως οι πίνακες A και B είναι ταυτοδύναμοι.

Άσκηση 18. (1) *Αν ο $n \times n$ πίνακας P είναι ταυτοδύναμος, τότε να δειχθεί ότι:*

$$(2P - I_n)^2 = I_n$$

(2) *Αν για τον $n \times n$ πίνακα A ισχύει ότι $A^2 = I_n$, τότε να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$\frac{1}{2}\Big(A + I_n\Big)$$

είναι ταυτοδύναμος.

Λύση. (1) *Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες πράξεων πινάκων, Θα έχουμε:*

$(2P-I_n)^2 = (2P-I_n)\cdot(2P-I_n) = 2P\cdot 2P - 2P\cdot I_n - I_n\cdot 2P + (I_n)^2 = 4P^2 - 2P - 2P + I_N = 4P - 4P + I_n = I_n$

(2) *Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες πράξεων πινάκων, Θα έχουμε:*

$$\left(\frac{1}{2}(A+I_n)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(A+I_n)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}(A+I_n)\right) = \left(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}I_n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}I_n\right) =$$

$$= \frac{1}{2}A\cdot\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A\cdot\frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}I_n\cdot\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_n\cdot\frac{1}{2}I_n = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}A\cdot I_n + \frac{1}{4}I_n\cdot A + \frac{1}{4}I_n\cdot I_n =$$

$$= \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}I_n = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_n = \frac{1}{2}(A+I_n)$$

Επομένως ο πίνακας $\frac{1}{2}(A+I_n)$ *είναι ταυτοδύναμος.*

Άσκηση 19. *Δίνεται ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. *Να δείξετε ότι* $A^4 = I_3$ *και ο ακολούθως να δείξετε ότι ο* A *είναι αντιστρέψιμος. Στην συνέχεια να βρείτε τους πίνακες* A^{-1} *και* A^{2018}.

Λύση. *Υπολογίσουμε εύκολα ότι:*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A^4 = A^2\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Επειδή $A^4 = I_3$, *θα έχουμε:*

$$A^3\cdot A = I_3 \quad \text{και} \quad A\cdot A^3 = I_3 \quad \Longrightarrow$$

$$A^{-1} = A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τέλος, επειδή $2018 = 504\cdot 4 + 2$, *θα έχουμε:*

$$A^{2018} = A^{504\cdot 4+2} = A^{504\cdot 4}\cdot A^2 = (A^4)^{504}\cdot A^2 = I_3^{504}\cdot A^2 = I_3\cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 20. *Έστω* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Βρείτε τον πίνακα* $A^n,\ n\in\mathbb{N}$.

Λύση. *Υπολογίζουμε εύκολα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \cdots$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι, $\forall n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αληθής για $n = 1$, $n = 2$. *Υποθέτουμε ότι* $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *όπου* $k \geq 3$. *Τότε:*

$$A^{k+1} = A^k\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα η επαγωγική υπόθεση είναι αληθής για $n = k+1$, *και επομένως από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής:*

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 1$$

Άσκηση 21. *Για κάθε $n \geq 1$, να βρείτε την n-οστή δύναμη του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Για να καταλάβουμε τη περιγραφή του A^n, ξεκινάμε πρώτα κάνοντας τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς πινάκων:*

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1+2+3+4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 1 \tag{$*$}$$

1. *Για $n = 1$, και λαμβάνοντας υπ΄όψιν ότι $A^1 = A$ και τη μορφή του πίνακα A, η ζητούμενη σχέση $(*)$ προφανώς ισχύει.*
2. Υπόθεση Επαγωγής: *Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή δεχόμαστε ότι:*

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για $n = k + 1$. Έχουμε*

$$A^{k+1} = A^kA = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως, η n-οστή δύναμη του πίνακα A είναι ο πίνακας $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 1$.

Άσκηση 22. *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και ακολούθως να βρεθεί ο αντίστροφός του A^{-1}.

Λύση. *Υπολογίζουμε:*

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4 \quad \Longrightarrow \quad A \cdot A = I_4 = A \cdot A$$

Επομένως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, και:

$$A^{-1} = A$$

Άσκηση 23. *Έστω A και B δύο $n \times n$ πίνακες και υποθέτουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε οι πίνακες $P^{-1}AP$ και $P^{-1}BP$ είναι διαγώνιοι. Να δειχθεί ότι: $AB = BA$.*

Λύση. *Θέτοντας $P^{-1}AP = X$ και $P^{-1}BP = Y$, θα έχουμε:*

$$P^{-1}AP = X \implies AP = PX \implies A = PXP^{-1} \quad \text{και} \quad P^{-1}BP = X \implies BP = PY \implies B = PYP^{-1}$$

$$AB = (PXP^{-1}) \cdot (PYP^{-1}) = PXP^{-1}PYP^{-1} = PXI_nYP^{-1} = PXYP^{-1}$$

$$BA = (PYP^{-1}) \cdot (PXP^{-1}) = PYP^{-1}PXP^{-1} = PYI_nXP^{-1} = PYXP^{-1}$$

Επειδή οι πίνακες $P^{-1}AP = X$ και $P^{-1}BP = Y$ είναι διαγώνιοι, μπορούμε να γράψουμε:

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_n \end{pmatrix}$$

όπου τα στοιχεία $\lambda_i, \kappa_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Επειδή

$$XY = \begin{pmatrix} \lambda_1\kappa_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\kappa_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\kappa_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1}\kappa_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\kappa_n \end{pmatrix} = YX$$

θα έχουμε:

$$AB = PXYP^{-1} = PYXP^{-1} = BA$$

Υπενθυμίζουμε ότι μια **σχέση** $\mathcal{R}$ επί ενός συνόλου S είναι ένα υποσύνολο $\mathcal{R} \subseteq S \times S$ του καρτεσιανού γινομένου $S \times S$. Αν $s_1, s_2 \in S$, και $(s_1, s_2) \in \mathcal{R}$ θα γράφουμε: $s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2$, δηλαδή:

$$\forall s_1, s_2 \in S: \quad s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2 \quad \Longleftrightarrow \quad (s_1, s_2) \in \mathcal{R}$$

Μια σχέση $\mathcal{R}$ επί του συνόλου S καλείται **σχέση ισοδυναμίας** αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) $\forall s \in S$: $s \sim_{\mathcal{R}} s$. (Ανακλαστική ιδιότητα)

(2) $\forall s_1, s_2 \in S$: $s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2 \implies s_2 \sim_{\mathcal{R}} s_1$. (Συμμετρική ιδιότητα)

(3) $\forall s_1, s_2, s_3 \in S$: $\begin{cases} s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2 \\ s_2 \sim_{\mathcal{R}} s_3 \end{cases} \implies s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_3$. (Μεταβατική ιδιότητα)

Αν $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου S και δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχισης θα συμβολίζουμε την $\mathcal{R}$ με "$\sim$" και θα γράφουμε $s_1 \sim s_2$ αντί $s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2$.

Άσκηση 24. *Δύο $n \times n$ πίνακες A και B καλούνται* **όμοιοι** *αν υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1}AP = B$. Να δειχθεί ότι ορίζοντας*

$$\forall A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) : \quad A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad \text{οι πίνακες } A \text{ και } B \text{ είναι όμοιοι}$$

αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας «$\sim$» στο σύνολο $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ όλων των $n \times n$ πινάκων υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.

Λύση. *Δείχνουμε ότι η σχέση «$\sim$» στο σύνολο $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ όλων των $n \times n$ πινάκων υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ είναι ανακλαστική, συμμετρική, και μεταβατική.*

(1) *«Ανακλαστική»: Για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, έχουμε ότι ο μοναδιαίος πίνακας I_n είναι αντιστρέψιμος και: $I_n^{-1} A I_n = I_n A = A$. Επομένως $A \sim A$.*

(2) *«Συμμετρική»: Έστω οι πίνακες $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, και υποθέτουμε ότι $A \sim B$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1}AP = B$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση από τα αριστερά με τον πίνακα P και από τα δεξιά με τον πίνακα P^{-1} θα έχουμε:*

$$P^{-1}AP = B \quad \Longrightarrow \quad AP = PB \quad \Longrightarrow \quad A = PBP^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$$

Επειδή ο πίνακας P^{-1} είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι $B \sim A$.

(3) *«Μεταβατική»: Έστω οι πίνακες $A, B, C \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, και υποθέτουμε ότι $A \sim B$ και $B \sim C$. Τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q έτσι ώστε $P^{-1}AP = B$ και $Q^{-1}BQ = C$. Τότε:*

$$Q^{-1}BQ = C \quad \Longrightarrow \quad Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = C \quad \Longrightarrow \quad (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = C \quad \Longrightarrow \quad (PQ)^{-1}A(PQ) = B$$

Επειδή ο πίνακας PQ είναι αντιστρέψιμος (με αντίστροφο τον πίνακα $Q^{-1}P^{-1}$), έπεται ότι $A \sim C$.

Συμπεραίνουμε ότι η σχέση «$\sim$» είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική και άρα είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Παρατήρηση. *Στις επόμενες τέσσερις ασκήσεις ζητείται να προσδιοριστεί αν ένας (άνω τριγωνικός) πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ακολούθως, αν είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο αντίστροφός του. Αργότερα με χρήση οριζουσών θα δούμε αποτελεσματικά κριτήρια για το πότε ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος και μεθόδους εύρεσης του αντίστροφου πίνακα.*

Η μέθοδος η οποία ακολουθείται στις παρακάτω ασκήσεις για την εύρεση του αντίστροφου του πίνακα A, αν αυτός υπάρχει, είναι η εξής: αναζητούμε πίνακα $X = (x_{ij})$ έτσι ώστε $A \cdot X = I_n = X \cdot A$. Τότε θα έχουμε το ακόλουθο σύστημα ως προς x_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$:

$$(A \cdot X)_{ij} = (I_n)_{ij} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

$$(X \cdot A)_{ij} = (I_n)_{ij} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} x_{ik}a_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Αν το παραπάνω σύστημα έχει (μοναδική) λύση, τότε υπολογίσουμε τα στοιχεία x_{ij} συναρτήσει των στοιχείων a_{ij} και τότε ο πίνακας X που προκύπτει είναι ο πίνακας A^{-1}. Αν το σύστημα δεν έχει λύση, τότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Σημειώνουμε ότι αν ο πίνακας A είναι άνω ή κάτω τριγωνικός, τότε και ο πίνακας X που αναζητούμε, αναγκαστικά θα είναι άνω ή κάτω τριγωνικός (αποδείξτε το σαν Άσκηση). Σε αυτή την περίπτωση οι πράξεις είναι σημαντικά απλούστερες.

Άσκηση 25. *Για κάθε $n \geq 1$, να βρεθεί η n-οστή δύναμη των πινάκων*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

όπου $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$.

Πότε οι παραπάνω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι; Αν είναι αντιστρέψιμοι, ποιοί είναι οι αντίστροφοί τους;

Λύση. (1) *Θα δείξουμε με χρήση Μαθηματικής Επαγωγής ότι,* $\forall n \geq 1$:

(1) $$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & b(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b\sum_{k=0}^{n-1} a^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν $n = 1$*, τότε η σχέση (1) είναι προφανώς αληθής.*

Αν $n = 2$*, τότε η σχέση (1) είναι αληθής, διότι:*

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b(1+a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι η σχέση (1) είναι αληθής όταν n*. Τότε*

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & b(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n b + b(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & b(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}+a^n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, η σχέση (1) είναι αληθής για κάθε $n \geq 1$.

Αν $a \neq 0$*, τότε θεωρούμε*[2] *τον πίνακα* $\begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *και θα έχουμε:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα ο πίνακας $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *είναι αντιστρέψιμος και*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν $a = 0$*, τότε ο πίνακας* $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *δεν είναι αντιστρέψιμος, διότι αν ήταν θα υπήρχε* 2×2 *πίνακας* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ *έτσι ώστε*

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

από όπου προκύπτει άμεσα ότι θα πρέπει να έχουμε $1 = 0$ *το οποίο είναι άτοπο. Άρα ο πίνακας* $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *δεν είναι αντιστρέψιμος.*

---

[2] Αναζητούμε πίνακα $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ έτσι ώστε $X \cdot A = I_2 = A \cdot X$. Επειδή ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και ο πίνακας X που αναζητούμε είναι άνω τριγωνικός, δηλαδή $z = 0$. Θα έχουμε:

$$A \cdot X = I_2 \implies \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} ax & ay+bw \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies ax = 1, \quad w = 1, \quad ay+bw = 0$$

Έτσι, για να είναι ο A αντιστρέψιμος, πρέπει $a \neq 0$ και τότε $x = a^{-1}$, $w = 1$, και $y = -a^{-1}bw = -a^{-1}b$, δηλαδή

$$X = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) *Αν $\lambda \neq 0$, θεωρούμε*[3] *τον πίνακα*

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

και τότε:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Επομένως ο πίνακας $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *είναι αντιστρέψιμος και*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Αν $\lambda = 0$, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *δεν είναι αντιστρέψιμος διότι αν ήταν αντιστρέψιμος, τότε*[4] *και ο πίνακας* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ *θα ήταν αντιστρέψιμος, $\forall n \geq 1$. Επειδή* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \mathbb{O}$, *καταλήγουμε στην αντίφαση ότι ο μηδενικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος. Επομένως ο πίνακας* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *δεν είναι αντιστρέψιμος.*

Για τις δυνάμεις του πίνακα, υπολογίζουμε:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \binom{2}{1}\lambda^1 & \binom{2}{2}\lambda^0 \\ 0 & \lambda^2 & \binom{2}{1}\lambda^1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \binom{3}{1}\lambda^2 & \binom{2}{2}\lambda^1 \\ 0 & \lambda^2 & \binom{3}{1}\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

όπου

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

είναι ο διωνυμικό συντελεστής. Ισχυριζόμαστε ότι

(2)
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

[3]Ο πίνακας που θεωρούμε προκύπτει αν εργασθούμε όπως περιγράφεται στην Παρατήρηση .

[4]Εστω ότι ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1} και ισχύει $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$. Για κάθε $k \geq 1$, θα έχουμε:

$$A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A \implies (A \cdot A^{-1})^k = I_n^k = (A^{-1} \cdot A)^k \implies A^k \cdot (A^{-1})^k = I_n = (A^{-1})^k \cdot A^k$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι επειδή οι πίνακες A και A^{-1} μετατίθενται, ισχύει ότι $(A \cdot A^{-1})^k = A^k \cdot (A^{-1})^k$ και $(A^{-1} \cdot A)^k = (A^{-1})^k \cdot A^k$. Επομένως ο πίνακας A^k είναι αντιστρέψιμος και

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι η σχέση (2) είναι αληθής όταν $n = 2$ ή $n = 3$. Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση (2), και τότε:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \lambda^n + \binom{n}{1}\lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} + \binom{n}{2}\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^{n+1} & \lambda^n + \binom{n}{1}\lambda^n \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (\binom{n}{1} + 1)\lambda^n & (\binom{n}{1} + \binom{n}{2})\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^{n+1} & (\binom{n}{1} + 1)\lambda^n \\ 0 & 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\binom{n}{1} + 1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} + 1 = \frac{n! + (n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n-1)!}{(n-1)!} = n + 1 = \frac{(n+1)!}{1!n!} = \binom{n+1}{1}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n!}{(n-2)!}\left(\frac{n+1}{2(n-1)}\right) = \frac{n!(n+1)}{2(n-2)!(n-1)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \binom{n+1}{2}$$

Επομένως ο τελευταίος πίνακας θα είναι

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n+1} = \cdots = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (\binom{n}{1} + 1)\lambda^n & (\binom{n}{1} + \binom{n}{2})\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^{n+1} & (\binom{n}{1} + 1)\lambda^n \\ 0 & 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \binom{n+1}{1}\lambda^n & \binom{n+1}{2}\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n+1}{1}\lambda^n \\ 0 & 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, θα έχουμε ότι η σχέση (2) είναι αληθής, $\forall n \geq 1$.

Άσκηση 26. *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Λύση. *Θεωρούμε*[5] *τον* $n \times n$ *πίνακα*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[5] Ο πίνακας που θεωρούμε προκύπτει αν εργασθούμε όπως περιγράφεται στην Παρατήρηση .

Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς $A \cdot B$ και $B \cdot A$, εύκολα βλέπουμε ότι $A \cdot B = I_n = B \cdot A$. Άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 27. *Να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Λύση. *Θεωρούμε*[6] *τον $n \times n$ πίνακα*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς $A \cdot B$ και $B \cdot A$, εύκολα βλέπουμε ότι $A \cdot B = I_n = B \cdot A$. Άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 28. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ 0 & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & x & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[6] Ο πίνακας που θεωρούμε προκύπτει αν εργασθούμε όπως περιγράφεται στην Παρατήρηση .

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Λύση. *Θεωρούμε*[7] *τον $n \times n$ πίνακα*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς $A \cdot B$ και $B \cdot A$, εύκολα βλέπουμε ότι $A \cdot B = I_n = B \cdot A$. Άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 29. *Έστω A και B $n \times n$ πίνακες τέτοιοι ώστε ο πίνακας $I_n - (AB)^2$ να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι ο πίνακας $I_n - (BA)^2$ είναι αντιστρέψιμος και*

$$\big(I_n - (BA)^2\big)^{-1} = I_n + B\big(I_n - (AB)^2\big)^{-1} ABA$$

Λύση. *Αρκεί να δείξουμε ότι*

$$(I_n - (BA)^2) \cdot [I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA] = I_n = [I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA] \cdot (I_n - (BA)^2)$$

1. *Θα έχουμε:*

$$\begin{aligned}
(I_n - (BA)^2) \cdot [I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA] &= I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&\quad -(BA)^2 - (BA)^2 B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&= I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&\quad -(BA)^2 - BABAB(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad +B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA - B(AB)^2(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad +B\big[(I_n - (AB)^2)^{-1} - (AB)^2(I_n - (AB)^2)^{-1}\big]ABA \\
&= I_n - (BA)^2 + B\big(I_n - (AB)^2\big)\big(I_n - (AB)^2\big)^{-1}ABA \\
&= I_n - (BA)^2 + BI_nABA \\
&= I_n - (BA)^2 + (BA)^2 \\
&= I_n
\end{aligned}$$

2. *Θα έχουμε:*

[7] Ο πίνακας που θεωρούμε προκύπτει αν εργασθούμε όπως περιγράφεται στην Παρατήρηση .

$$
\begin{aligned}
[I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA] \cdot (I_n - (BA)^2) &= I_n + B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA \\
&\quad -(BA)^2 - B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA(BA)^2 \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad +B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABA - B(I_n - (AB)^2)^{-1}ABABABA \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad +B(I_n - (AB)^2)^{-1}\big[ABA - (AB)^2ABA\big] \\
&= I_n - (BA)^2 + \\
&\quad +B(I_n - (AB)^2)^{-1}(I_n - (AB)^2)ABA \\
&= I_n - (BA)^2 + BI_nABA \\
&= I_n - (BA)^2 + BABA \\
&= I_n - (BA)^2 + (BA)^2 \\
&= I_n
\end{aligned}
$$

*Από τα **1.** και **2.** έχουμε το ζητούμενο.*

Παρατήρηση. *Έστω A, B δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε, όπως θα δούμε σύντομα με χρήση της θεωρίας οριζουσών, ισχύει ότι:*

$$A \cdot B = I_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad B \cdot A = I_n$$

και άρα, αν ικανοποιείται μία από τις σχέσεις $A \cdot B = I_n$ ή $B \cdot A = I_n$, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B$. Επομένως στην Άσκηση 29 (και σε ανάλογες Ασκήσεις, βλέπε την Άσκηση 32 παρακάτω), αρκεί να δειχθεί μόνο η μία εκ των δύο απαιτουμένων ισοτήτων.

Άσκηση 30. *Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = 0$, Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και*

$$A^{-1} = -A^4$$

Λύση. *Από τη σχέση $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = 0$ έχουμε $-A^4 + A^3 - A^2 + A = I_n$ και άρα*

$$A(-A^3 + A^2 - A + I_n) = I_n \quad \text{και} \quad (-A^3 + A^2 - A + I_n)A = I_n$$

Συνεπώς ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = -A^3 + A^2 - A + I_n = -A^4$.

Άσκηση 31. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Να δειχθεί ότι:*

$$\text{ο πίνακας } I_n + AB \text{ είναι αντιστρέψιμος} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ο πίνακας } I_n + BA \text{ είναι αντιστρέψιμος}$$

Λύση. *"$\Longrightarrow$" Υποθέτουμε ότι ο πίνακας $I_n + AB$ είναι αντιστρέψιμος. Συμβολίζουμε με C τον αντίστροφό του:*

$$C := (I_n + AB)^{-1}$$

και έτσι θα έχουμε:

$$(I_n + AB) \cdot C = I_n = C \cdot (I_n + AB), \quad \text{ιδιαίτερα θα έχουμε:} \quad C + ABC = I_n, \quad \text{δηλαδή}$$

$$ABC = I_n - C \tag{$*$}$$

Θεωρούμε τον πίνακα $I_n - BCA$. Θα δείξουμε ότι ο πίνακας $I_n + BA$ είναι αντιστρέψιμος και $(I_n + BA)^{-1} = I_n - BCA$.

Θα έχουμε:

$$(I_n - BCA) \cdot (I_n + BA) = I_n + BA - BCA - BCABA = I_n + BA - BCA - BCABI_nA =$$

$$= I_n + BA - BCA - BCABCC^{-1}A = I_n + BA - BCA - BC(ABC)C^{-1}A \overset{(*)}{=}$$
$$= I_n + BA - BCA - BC(I_n - C)C^{-1}A = I_n + BA - BCA - (BCI_nC^{-1}A - BCCC^{-1}A) =$$
$$= I_n + BA - BCA - (BA - BCA) = I_n + BA - BCA - BA + BCA = I_n$$

και επομένως:

$$(I_n - BCA) \cdot (I_n + BA) = I_n \tag{1}$$

Παρόμοια θα έχουμε:

$$(I_n + BA) \cdot (I_n - BCA) = I_n - BCA + BA - BABCA \overset{(*)}{=} I_n - BCA + BA - B(I_n - C)A =$$
$$= I_n - BCA + BA - BA + BCA = I_n$$

και επομένως

$$(I_n + BA) \cdot (I_n - BCA) = I_n \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο πίνακας $I_n + BA$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(I_n + BA)^{-1} = I_n - BCA = I_n - B(I_n + AB)^{-1}A$$

"$\Longleftarrow$" *Η απόδειξη είναι ανάλογη*[8] *και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.*

Άσκηση 32. *Θεωρούμε τους $n \times n$ πίνακες A και B και υποθέτουμε ότι ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:*

$$A + B = AB \tag{†}$$

Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει: $A^{-1} + B^{-1} = I_n$.

Λύση. *Επειδή ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει ο αντίστροφός του B^{-1}. Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (†) από δεξιά με τον πίνακα B^{-1} θα έχουμε:*

$$A + B = AB \Longrightarrow (A + B)B^{-1} = ABB^{-1} \Longrightarrow AB^{-1} + I_n = A \Longrightarrow A - AB^{-1} = I_n \Longrightarrow A(I_n - B^{-1}) = I_n$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση , ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = I_n - B^{-1}$. Τέλος έχουμε ότι

$$A^{-1} + B^{-1} = I_n - B^{-1} + B^{-1} = I_n$$

Άσκηση 33. *Έστω A, B δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες έτσι ώστε ο πίνακας $A + B^{-1}$ να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι ο πίνακας $A^{-1} + B$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:*

$$(A^{-1} + B)^{-1} = A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}$$

Λύση. *Παρατηρούμε ότι:*

$$(A^{-1} + B) \cdot \big(A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}\big) = \big((A^{-1} + B) \cdot A\big) \cdot \big((A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}\big) =$$
$$= \big(A^{-1} \cdot A + B \cdot A\big) \cdot \big((B \cdot (A + B^{-1}))^{-1}\big) = (I_n + B \cdot A) \cdot \big((B \cdot A + B \cdot B^{-1})^{-1}\big) =$$
$$= (I_n + B \cdot A) \cdot (I_n + B \cdot A)^{-1} = I_n$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση , ο πίνακας $A^{-1} + B$ είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1} + B)^{-1} = A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}$. Διαφορετικά, υπολογίζουμε:

$$\big(A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}\big) \cdot (A^{-1} + B) = \big(A \cdot (A + B^{-1})^{-1}\big) \cdot \big(B^{-1} \cdot (A^{-1} + B)\big) =$$
$$= \big(A \cdot (A + B^{-1})^{-1}\big) \cdot \big(B^{-1} \cdot A^{-1} + B^{-1} \cdot B\big) = \big(A \cdot (A + B^{-1})^{-1}\big) \cdot \big((A \cdot B)^{-1} + I_n\big) =$$
$$= \big((A^{-1})^{-1} \cdot (A + B^{-1})^{-1}\big) \cdot \big((A \cdot B)^{-1} + I_n\big) = \big(((A + B^{-1}) \cdot A^{-1})^{-1}\big) \cdot \big((A \cdot B)^{-1} + I_n\big) =$$

[8] Αν ο πίνακας $I_n + BA$ είναι αντιστρέψιμος, θέτουμε $D = (I_n + BA)^{-1}$ και τότε $(I_n + BA) \cdot D = I_n$. Επομένως θα έχουμε $BAD = I_n - D$. Θεωρούμε τον πίνακα $I_n - ADB$ και δείχνουμε ότι $(I_n + AB) \cdot (I_n - ADB) = I_n = (I_n - ADB) \cdot (I_n + AB)$. Επομένως ο πίνακας $I_n + AB$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(I_n + AB)^{-1} = I_n - ADB = I_n - A(I_n + BA)^{-1}B$$

$$= \big((A\cdot A^{-1}+B^{-1}\cdot A^{-1})^{-1}\big)\cdot\big((A\cdot B)^{-1}+I_n\big)=\big((A\cdot B)^{-1}+I_n\big)^{-1}\cdot\big((A\cdot B)^{-1}+I_n\big)=I_n$$

Άρα

$$(A^{-1}+B)\cdot\big(A\cdot(A+B^{-1})^{-1}\cdot B^{-1}\big)=I_n=\big(A\cdot(A+B^{-1})^{-1}\cdot B^{-1}\big)\cdot(A^{-1}+B)$$

Άρα ο πίνακας $A^{-1}+B$ *είναι αντιστρέψιμος και* $(A^{-1}+B)^{-1}=A\cdot(A+B^{-1})^{-1}\cdot B^{-1}$.

Παρατήρηση. *Έστω* A *και* B *δύο αντιστρέψιμοι* $n\times n$ *πίνακες. Ακολουθώντας τη μέθοδο λύσης της παραπάνω Άσκησης 33, αποδεικνύονται ακριβώς ανάλογα και οι ακόλουθοι ισχυρισμοί.*

(1) *Αν ο πίνακας* $A^{-1}+B$ *είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας* $A+B^{-1}$ *είναι αντιστρέψιμος και*
$$(A+B^{-1})^{-1}=A^{-1}\cdot(A^{-1}+B)^{-1}\cdot B$$
(2) *Αν ο πίνακας* $A^{-1}+B^{-1}$ *είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας* $A+B$ *είναι αντιστρέψιμος και*
$$(A+B)^{-1}=A^{-1}\cdot(A^{-1}+B^{-1})^{-1}\cdot B^{-1}$$
(3) *Αν ο πίνακας* $A+B$ *είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας* $A^{-1}+B^{-1}$ *είναι αντιστρέψιμος και*
$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A\cdot(A+B)^{-1}\cdot B$$

Άσκηση 34. *Να ευρεθούν όλοι οι πίνακες που μετατίθενται με τους πίνακες τής μορφής:*

(1) $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$,

(2) $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Λύση. *Ας είναι* $C=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ *ένας πίνακας με* $AC=CA$, *δηλαδή* $\begin{pmatrix}a&b\\-a&-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b&0\\c-d&0\end{pmatrix}$. *Τότε* $b=0$ *και* $c=d-a$. *Επομένως ο πίνακας* C *είναι της μορφής*

$$C=\begin{pmatrix}a&0\\d-a&d\end{pmatrix}\quad(a,d\in\mathbb{K})$$

Αντίστροφα εύκολα βλέπουμε ότι κάθε πίνακας της παραπάνω μορφής μετατίθεται με τον A.

Ας είναι $C=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{pmatrix}$ *ένας πίνακας με* $BC=CB$, *δηλαδή* $\begin{pmatrix}d&e&f\\g&h&k\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&d&e\\0&g&h\end{pmatrix}$. *Τότε*

$$d=0,\quad g=0,\quad h=0,\quad e=a,\quad k=a,\quad f=b$$

Επομένως ο πίνακας C *είναι της μορφής*

$$C=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}\quad(a,b,c\in\mathbb{K})$$

Αντίστροφα εύκολα βλέπουμε ότι κάθε πίνακας της παραπάνω μορφής μετατίθεται με τον B.

Άσκηση 35. *Να προσδιοριστούν όλοι οι* 2×2 *ταυτοδύναμοι πίνακες.*

Λύση. *Ας είναι* $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ *ένας* 2×2 *πίνακας με* $A^2=A$, *δηλαδή*

$$\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\iff\begin{cases}a^2+bc=a & (1)\\ ab+bd=b & (2)\\ ac+cd=c & (3)\\ bc+d^2=d & (4)\end{cases}$$

Έστω ότι $b \neq 0$, *τότε η (2) δίνει τη λύση* $d = 1 - a$, *η οποία ικανοποιεί και την (3). Από την (1) έχουμε* $c = \frac{a-a^2}{b}$. *Αυτές οι τιμές των* c, d *ικανοποιούν την (4). Άρα αν* $b \neq 0$, *τότε οι ταυτοδύναμοι* 2×2 *πίνακες με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$ *είναι οι πίνακες της μορφής:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$$

Έστω ότι $b = 0$, *τότε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων γίνεται*

$$\begin{cases} a^2 = a \\ ac + cd = c \\ d^2 = d \end{cases}$$

Παίρνοντας υπ' όψιν ότι $a = 0$ *ή* 1 *και* $d = 0$ *ή* 1 *έχουμε τις λύσεις:* $(a = 0, b = 0, d = 1, c \in \mathbb{K})$, $(a = 1, b = 0, d = 0, c \in \mathbb{K})$, $(a = 0, b = 0, c = 0, d = 0)$, $(a = 0, b = 0, c = 0, d = 1)$, $(a = 1, b = 0, c = 0, d = 0)$, $(a = 1, b = 0, c = 0, d = 1)$, *δηλαδή οι ταυτοδύναμοι* 2×2 *πίνακες με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$ *είναι οι πίνακες της μορφής (*$c \in \mathbb{K}$*):*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Συνοψίζοντας οι ταυτοδύναμοι 2×2 *πίνακες με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$ *είναι οι πίνακες της μορφής:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{K},\ b \neq 0) \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{K})$$

Άσκηση 36. *Να προσδιοριστούν όλοι οι* 2×2 *πίνακες* A *που υψούμενοι στο τετράγωνο είναι ίσοι με τον μηδενικό* 2×2 *πίνακα, δηλαδή όλοι οι* 2×2 *πίνακες* A *για τους οποίους ισχύει ότι* $A^2 = O$.

Λύση. *Ας είναι* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *ένας* 2×2 *πίνακας με* $A^2 = O$, *δηλαδή*

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 + bc = 0 & (1) \\ ab + bd = 0 & (2) \\ ac + cd = 0 & (3) \\ bc + d^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Έστω ότι $b \neq 0$, *τότε η (1) δίνει* $c = -\frac{a^2}{b}$ *και η (2) δίνει* $d = -a$. *Οι (3) και (4) ικανοποιούνται από τις προηγούμενες λύσεις. Έτσι προκύπτουν οι πίνακες*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \quad (b \neq 0)$$

Έστω ότι $b = 0$, *τότε επειδή έπεται* $a = 0$ *και* $d = 0$, *έχουμε τη λύση* $a = 0, b = 0, c \in \mathbb{K}, d = 0$. *Δηλαδή προκύπτει ο πίνακας*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{K})$$

Συνοψίζοντας οι 2×2 *πίνακες* A *με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$ *έτσι ώστε* $A^2 = O$, *είναι οι πίνακες της μορφής:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{K},\ b \neq 0) \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{K})$$