ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Λυσεις Ασκησεων - Φυλλαδιο 2

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html

Παρασκευή 29 Οκτωβρίου 2021

Υπενθυμίζουμε ότι για τις στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών ενός $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, ισχύουν τα εξής:

(1) Η εκτέλεση της στοιχειώδους πράξης $\Gamma_i \longrightarrow \Gamma_i + \lambda\Gamma_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$, στον A ισοδυναμεί με την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού $E_{ij}(\lambda) \cdot A$, δηλαδή:

$$A \xmapsto{\Gamma_i \longrightarrow \Gamma_i + \lambda\Gamma_j} E_{ij}(\lambda) \cdot A$$

όπου $E_{ij}(\lambda)$ είναι ο $m \times m$ στοιχειώδης πίνακας

$$E_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει προκύψει από τον μοναδιαίο $m \times m$ πίνακα I_m προσθέτοντας στην i-γραμμή λ φορές την j-γραμμή.

(2) Η εκτέλεση της στοιχειώδους πράξης $\Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_j$ στον A ισοδυναμεί με την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού $E_{ij} \cdot A$, δηλαδή:

$$A \xmapsto{\Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_j} E_{ij} \cdot A$$

όπου E_{ij} είναι ο $m \times m$ στοιχειώδης πίνακας

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει προκύψει από τον μοναδιαίο $m \times m$ πίνακα I_m με αμοιβαία εναλλαγή της i-γραμμής με την j-γραμμή.

(3) Η εκτέλεση της στοιχειώδους πράξης $\Gamma_i \longrightarrow \lambda\Gamma_j$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, στον A ισοδυναμεί με την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού $E_{ij} \cdot A$, δηλαδή:

$$A \xmapsto{\Gamma_i \longleftrightarrow \lambda\Gamma_i} E_i(\lambda) \cdot A$$

όπου $E_i(\lambda)$ είναι ο $m \times m$ στοιχειώδης πίνακας

$$E_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει προκύψει από τον μοναδιαίο $m \times m$ πίνακα I_m πολλαπλασιάζοντας την i-γραμμή με λ.

Υπενθυμίζουμε ότι ορίζονται και οι στοιχειώδεις πράξεις επί των στηλών ενός $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$:

(1) Αντικατάσταση της i-στήλης Σ_i του πίνακα A με τη στήλη $\Sigma_i + \lambda\Sigma_j$:

$$A \xmapsto{\Sigma_i \longrightarrow \Sigma_i + \lambda\Sigma_j} A'$$

(2) Αμοιβαία εναλλαγή της i-στήλης Σ_i με την j-στήλη Σ_j:

$$A \xmapsto{\Sigma_i \longleftrightarrow \Sigma_j} A''$$

(3) Αντικατάσταση της i-στήλης Σ_i του πίνακα A με τη στήλη $\lambda\Sigma_i$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$:

$$A \xmapsto{\Sigma_i \longrightarrow \lambda\Sigma_i} A'''$$

Άσκηση 1. *Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθούν τα εξής:*

(1)

$$A \xmapsto{\Sigma_i \longrightarrow \Sigma_i + \lambda\Sigma_j} A \cdot {}^tE_{ji}(\lambda)$$

όπου ${}^tE_{ij}(\lambda) = E_{ji}(\lambda)$ είναι ο ανάστροφος του στοιχειώδους $n \times n$ πίνακα $E_{ij}(\lambda)$.

(2)

$$A \xmapsto{\Sigma_i \longleftrightarrow \Sigma_j} A \cdot E_{ij}$$

όπου ο στοιχειώδης πίνακας $E_{ij} = {}^tE_{ij}$ είναι μεγέθους $n \times n$.

(3)

$$A \xmapsto{\Sigma_i \longrightarrow \lambda\Sigma_i} A \cdot E_i(\lambda)$$

όπου ο στοιχειώδης πίνακας $E_i(\lambda) = {}^tE_i(\lambda)$ είναι μεγέθους $n \times n$.

Λύση. (1) *Θα έχουμε:*

$$A \cdot {}^tE_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+\lambda a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii}+\lambda a_{ij} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji}+\lambda a_{jj} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi}+\lambda a_{mj} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας προφανώς έχει προκύψει από τον A *με εκτέλεση της στοιχειώδους πράξης* $\Sigma_i \longrightarrow \Sigma_i + \lambda\Sigma_{ij}$ *και άρα:*

$$A \xmapsto{\Sigma_i \longrightarrow \Sigma_i + \lambda\Sigma_j} A \cdot {}^tE_{ij}(\lambda)$$

(2) *Θα έχουμε:*

$$A \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας προφανώς έχει προκύψει από τον A *με εκτέλεση της στοιχειώδους πράξης* $\Sigma_i \longleftrightarrow \Sigma_j$ *και άρα:*

$$A \xmapsto{\Sigma_i \longleftrightarrow \Sigma_j} A \cdot E_{ij}$$

(3) *Θα έχουμε:*

$$A \cdot E_i(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \lambda a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας προφανώς έχει προκύψει από τον A με εκτέλεση της στοιχειώδους πράξης $\Sigma_i \longleftrightarrow \lambda\Sigma_i$ και άρα:

$$A \xmapsto{\Sigma_i \longleftrightarrow \lambda\Sigma_i} A \cdot E_{ij}$$

Άσκηση 2. *Έστω A ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας. Να εξεταστεί πως θα μετασχηματισθεί ο πίνακας A^{-1} όταν στις γραμμές του πίνακα A εκτελέσουμε τις ακόλουθες πράξεις, όπου $1 \leq i, j \leq n$, $\lambda \in \mathbb{K}$, και $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$:*

(1) $\Gamma_i \longrightarrow \Gamma_i + \lambda\Gamma_j$,
(2) $\Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_j$.
(3) $\Gamma_i \longrightarrow k\Gamma_i$.

Λύση. (1) *Εφαρμόζοντας τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_i \longrightarrow \Gamma_i + \lambda\Gamma_j$ στις γραμμές του πίνακα A, πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα αριστερά με τον στοιχειώδη πίνακα $E_{ij}(\lambda)$, δηλαδή έχουμε:*

$$A \xmapsto{\Gamma_i \longrightarrow \Gamma_i + \lambda\Gamma_j} E_{ij}(\lambda)A$$

Επειδή οι πίνακες $E_{ij}(\lambda)$ και A είναι αντιστρέψιμοι και ισχύει ότι $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$, έπεται ότι ο πίνακας $E_{ij}(\lambda)A$ είναι αντιστρέψιμος κα ισχύει ότι

$$\big(E_{ij}(\lambda)A\big)^{-1} = A^{-1}E_{ij}(\lambda)^{-1} = A^{-1}E_{ij}(-\lambda)$$

*Σύμφωνα με την Άσκηση **1**, έχουμε*

$$A^{-1} \xmapsto{\Sigma_j \longrightarrow \Sigma_j - \lambda\Sigma_i} A^{-1t}E_{ji}(-\lambda) = A^{-1} \cdot E_{ij}(-\lambda)$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_i \longrightarrow \Gamma_i + \lambda\Gamma_j$ στις γραμμές του πίνακα A, στον αντίστροφο A^{-1} του πίνακα A εφαρμόζουμε τη στοιχειώδη πράξη $\Sigma_j \longrightarrow \Sigma_j - \lambda\Sigma_i$ στις στήλες του πίνακα A^{-1}.

(2) *Εφαρμόζοντας τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_j$ στις γραμμές του πίνακα A, πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα αριστερά με τον στοιχειώδη πίνακα E_{ij}, δηλαδή έχουμε:*

$$A \xmapsto{\Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_j} E_{ij}A$$

Επειδή οι πίνακες E_{ij} και A είναι αντιστρέψιμοι και ισχύει ότι $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$, έπεται ότι ο πίνακας $E_{ij}A$ είναι αντιστρέψιμος κα ισχύει ότι

$$\big(E_{ij}A\big)^{-1} = A^{-1}E_{ij}^{-1} = A^{-1}E_{ij}$$

*Σύμφωνα με την Άσκηση **1**, έχουμε*

$$A^{-1} \xmapsto{\Sigma_i \longleftrightarrow \Sigma_j} A^{-1} \cdot E_{ij}$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_i \longleftrightarrow \Gamma_j$ στις γραμμές του πίνακα A, στον αντίστροφο A^{-1} του πίνακα A εφαρμόζουμε τη στοιχειώδη πράξη $\Sigma_i \longleftrightarrow \Sigma_j$ στις στήλες του πίνακα A^{-1}.

(3) *Εφαρμόζοντας τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_i \longrightarrow \lambda\Gamma_i$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, στις γραμμές του πίνακα A, πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα A από τα αριστερά με τον στοιχειώδη πίνακα $E_i(\lambda)$, δηλαδή έχουμε:*

$$A \xmapsto{\Gamma_i \longrightarrow \lambda\Gamma_i} E_i(\lambda)A$$

Επειδή οι πίνακες $E_i(\lambda)$ και A είναι αντιστρέψιμοι και ισχύει ότι $E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$, έπεται ότι ο πίνακας $E_i(\lambda)A$ είναι αντιστρέψιμος κα ισχύει ότι

$$\big(E_i(\lambda)A\big)^{-1} = A^{-1}E_{ij}(\lambda)^{-1} = A^{-1}E_i(\lambda^{-1})$$

*Σύμφωνα με την Άσκηση **1**, έχουμε*

$$A^{-1} \xmapsto{\Sigma_i \longrightarrow \lambda^{-1}\Sigma_i} A^{-1} \cdot E_i(\lambda^{-1})$$

Επομένως, εφαρμόζοντας τη στοιχειώδη πράξη $\Gamma_i \longrightarrow \lambda\Gamma_i$ στις γραμμές του πίνακα A, στον αντίστροφο A^{-1} του πίνακα A εφαρμόζουμε τη στοιχειώδη πράξη $\Sigma_i \longrightarrow \lambda^{-1}\Sigma_i$ στις στήλες του πίνακα A^{-1}.

Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Ο πίνακας A καλείται **αριστερά αντιστρέψιμος** αν και μόνον αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας Y έτσι ώστε $Y A = I_n$, και τότε ο πίνακας Y καλείται ένας **αριστερός αντίστροφος** του A. Παρόμοια, ο πίνακας A καλείται **δεξιά αντιστρέψιμος** αν και μόνον αν υπάρχει $n \times m$ πίνακας X έτσι ώστε $A X = I_m$, και τότε ο πίνακας X καλείται ένας **δεξιός αντίστροφος** του A.

Άσκηση 3 (Βλέπε την Άσκηση 7 για ένα ελαφρώς γενικότερο αποτέλεσμα)**.** *Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο A είναι τετραγωνικός και είναι αριστερά και δεξιά αντιστρέψιμος.*

Λύση. *Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε προφανώς $m = n$, υπάρχει ο αντίστροφός πίνακας του A^{-1} ο οποίος είναι μεγέθους $n \times n$ και ισχύει ότι $A\,A^{-1} = I_n$ και $A^{-1}\,A = I_n$. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας A είναι δεξιά και αριστερά αντιστρέψιμος.*

Αντίστροφα, έστω ότι ο πίνακας A είναι δεξιά και αριστερά αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ένας $n \times m$ πίνακας Y έτσι ώστε $Y A = I_n$ και υπάρχει $n \times m$ πίνακας X έτσι ώστε $A X = I_m$. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με τον πίνακα X θα έχουμε $(Y\,A)\,X = I_n\,X = X$, δηλαδή $Y\,(A\,X) = X \Longrightarrow Y\,I_m = X$ και επομένως $Y = X$. Επειδή ο A είναι τετραγωνικός, έπεται ότι $n = m$, ο πίνακας X είναι τετραγωνικός και $A\,X = I_n = X\,A$. Αυτό σημαίνει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και $X = A^{-1}$.

Για παράδειγμα, έστω ο 2×1 πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Τότε θέτοντας $Y = \begin{pmatrix} 1 & a \end{pmatrix}$, όπου $a \in \mathbb{K}$, θα έχουμε: $YA = (1) = I_1$, δηλαδή ο πίνακας Y είναι ένας αριστερός αντίστροφος του A. Παρατηρούμε ότι ο A έχει άπειρο πλήθος αριστερών αντίστροφων πινάκων και δεν είναι αντιστρέψιμος. Παρόμοια, έστω ο 1×2 πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε θέτοντας $X = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, όπου $a \in \mathbb{K}$, έχουμε $AQ = (1) = I_1$, δηλαδή ο πίνακας X είναι ένας δεξιός αντίστροφος του A. Παρατηρούμε ότι ο A έχει άπειρο πλήθος δεξιών αντίστροφων πινάκων και δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 4. *Θεωρούμε τον 3×2 πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν ο πίνακας A έχει δεξιούς ή αριστερούς αντίστροφους πίνακες.

Λύση. *Έστω*

$$Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

ένας δεξιός αντίστροφος του A. Τότε θα έχουμε

$$I_3 = AY \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ -a+d & -b+e & -c+f \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} a+d=1, \quad b+e=0, \quad c+f=0 \\ -a+d=0, \quad -b+e=1, \quad -c+f=0 \\ a=0, \quad b=0, \quad c=1 \end{cases}$$

Οι παραπάνω σχέσεις μας οδηγούν στην αντίφαση $0 = 1$, και επομένως δεν υπάρχει πίνακας 2×3 πίνακας Y έτσι ώστε $AY = I_3$. Έτσι ο πίνακας A δεν έχει δεξιό αντίστροφο.

Έστω

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

ένας αριστερός αντίστροφος του A. Τότε θα έχουμε

$$I_2 = XA \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+c & a+b \\ d-e+f & d+e \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} a-b+c=1, \quad a+b=0 \\ d-e+f=0, \quad d+e=1 \end{cases}$$

Τότε θα έχουμε $b=-a$ και $e=1-d$ και επομένως

$$X = \begin{pmatrix} a & -a & 1-2a \\ d & 1-d & 1-2d \end{pmatrix}$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι για τυχόντα στοιχεία $a, d \in \mathbb{K}$, έχουμε

$$\begin{pmatrix} a & -a & 1-2a \\ d & 1-d & 1-2d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Επομένως ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος και έχει άπειρο πλήθος αριστερών αντίστροφων.

Υπενθυμίζουμε ότι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ είναι μοναδική και συμβολίζεται με $\Gamma(A)$. Η **βαθμίδα γραμμών** του πίνακα A ορίζεται να είναι το πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών της ισχυρά γ-κλιμακωτής μορφής $\Gamma(A)$ του πίνακα A και συμβολίζεται με $\gamma(A)$. Προφανώς: $\gamma(A) \leq m$.

Παρόμοια η ισχυρά σ-κλιμακωτή μορφή νός πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ είναι μοναδική και συμβολίζεται με $\Sigma(A)$. Η **βαθμίδα στηλών** του πίνακα A ορίζεται να είναι το πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών της ισχυρά σ-κλιμακωτής μορφής $\Sigma(A)$ του πίνακα A και συμβολίζεται με $\sigma(A)$. Προφανώς: $\sigma(A) \leq n$.

Από την θωρία γνωρίζουμε ότι, για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, ισχύει ότι: $\gamma(A) = \sigma(A)$ και η κοινή αυτή τιμή καλείται η **βαθμίδα** του πίνακα A και συμβολίζεται με:

$$\mathbf{r}(A) = \sigma(A) = \gamma(A)$$

Παρατηρούμε ότι η βαθμίδα $\mathbf{r}(A)$ ενός πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\mathbf{r}(A) \;\leq\; \min\{m, n\} \tag{$*$}$$

Άσκηση 5. *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(1) $\gamma(A) = m$.
(2) *Υπάρχει πίνακας $B \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε: $AB = I_m$.*

Επιπλέον να δειχθεί ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(3) $\sigma(A) = n$.
(4) *Υπάρχει πίνακας $C \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε: $CA = I_n$.*

Λύση. *(1) $\Longrightarrow$ (2) Έστω $\gamma(A) = m$. Τότε $\mathbf{r}(A) = m$ και τότε από τη σχέση $(*)$ έπεται ότι $m \leq n$. Τότε η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του A έχει m το πλήθος μη-μηδενικές γραμμές. Επειδή ο πίνακας A έχει m το πλήθος γραμμές, έπεται ότι ο πίνακας $\Gamma(A)$ θα είναι της μορφής:*

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{1\,m+1} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_{2\,m+1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{m\,m+1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον $n \times m$ πίνακα

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου οι m στήλες και οι πρώτες m γραμμές σχηματίζουν τον μοναδιαίο $m \times m$ πίνακα I_m. Προφανώς τότε θα έχουμε

$$\Gamma(A)X = I_m \tag{1}$$

Για την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του A γνωρίζουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P έτσι ώστε: $PA = \Gamma(A)$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (1), θα έχουμε

$$PA = \Gamma(A) \quad \Longrightarrow \quad PAX = \Gamma(A)X = I_m \quad \Longrightarrow \quad AX = P^{-1} \quad \Longrightarrow \quad AXP = I_m$$

Θέτοντας $B = XP$ αποκτούμε έναν $n \times m$ πίνακα για τον οποίο ισχύει ότι $AB = I_m$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Έστω B ένας $n \times m$ πίνακα για τον οποίο ισχύει ότι $AB = I_m$. Τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση $PA = \Gamma(A)$, όπου ο $m \times m$ πίνακας P είναι αντιστρέψιμος, θα έχουμε:

$$PAB = P \quad \Longrightarrow \quad \Gamma(A)B = P \quad \Longrightarrow \quad \Gamma(A)BP^{-1} = I_m$$

Αν μια από τις m γραμμές του πίνακα $\Gamma(A)$ είναι η μηδενική γραμμή, έστω για παράδειγμα ότι αυτή είναι η γραμμή Γ_i, τότε από τον ορισμό πολλαπλασιασμού πινάκων έπεται ότι η i-γραμμή του πίνακα $\Gamma(A)BP^{-1}$ θα πρέπει να είναι η μηδενική. Αυτό είναι άτοπο διότι από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η i-γραμμή του πίνακα $\Gamma(A)BP^{-1}$ συμπίπτει με την i-γραμμή του πίνακα I_m η οποία είναι προφανώς μη-μηδενική. Επομένως όλες οι γραμμές του πίνακα $\Gamma(A)$ είναι μη-μηδενικές και αυτό σημαίνει ότι $\gamma(A) = m$.

Άσκηση 6. *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Να δειχθεί ότι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(1) $\sigma(A) = n$.

(2) *Υπάρχει πίνακας $C \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε: $CA = I_n$.*

Λύση. *Θεωρούμε τον $n \times m$ πίνακα ${}^tA$. Τότε $\gamma({}^tA) = \sigma(A)$. Επομένως χρησιμοποιώντας την Άσκηση 5, θα έχουμε:*

$$\sigma(A) = n \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma({}^tA) = n \quad \Longleftrightarrow \quad \text{υπάρχει } m \times n \text{ πίνακας } B \text{ έτσι ώστε}: \ {}^tAB = I_n$$

Επειδή $I_n = {}^tI_n = {}^t\big({}^tAB\big) = {}^tB\,{}^t({}^tA) = {}^tBA$, θέτοντας $C = {}^tB \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, από τις παραπάνω ισοδυναμίες προκύπτει ότι:

$$\sigma(A) = n \quad \Longleftrightarrow \quad \text{υπάρχει } n \times m \text{ πίνακας } C \text{ έτσι ώστε}: \ CA = I_n$$

Άσκηση 7. *Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Να δειχθεί ότι, αν ο A έχει έναν αριστερό αντίστροφο X και έναν δεξιό αντίστροφο Y, τότε $m = n$, $X = Y$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = X = Y$.*

Ιδιαίτερα ισχύει ότι: ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν έχει δεξιό και αριστερό αντίστροφο.

Λύση. *Επειδή ο πίνακας X είναι ένας αριστερός αντίστροφος του A, έπεται ότι το μέγεθός του είναι $n \times m$ και θα έχουμε $XA = I_n$. Από την Άσκηση 6 προκύπτει τότε ότι $\sigma(A) = n$.*

Επειδή ο πίνακας Y είναι ένας δεξιός αντίστροφος του A, έπεται ότι το μέγεθός του είναι $n \times m$ και θα έχουμε $AY = I_m$. Από την Άσκηση 5 προκύπτει τότε ότι $\gamma(A) = m$.

Επειδή για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ισχύει ότι $\gamma(A) = \sigma(A)$, έπεται ότι $n = m$. Επιπλέον θα έχουμε:

$$XA = I_n \quad \Longrightarrow \quad XAY = Y \quad \Longrightarrow \quad X = Y$$

Άρα θα έχουμε $XA = I_n = AX$ και επομένως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $X = A^{-1}$.

Μέθοδος εύρεσης αντίστροφου ενός αντιστρέψιμου πίνακα με χρήση στοιχειωδών πράξεων

Υπενθυμίζουμε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

είναι ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον $n \times 2n$ πίνακα

$$\big(A \,|\, I_n\big) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα $(A|I_3)$ με σκοπό να προσδιορίσουμε την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του πίνακα A. Τότε ο πίνακας $(A|I_3)$ θα μετατραπεί σε έναν πίνακα της μορφής

$$\big(\Gamma(A) \,|\, X\big)$$

1. Αν $\Gamma(A) = I_n$, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = X$.
2. Αν $\Gamma(A) \neq I_n$, τότε ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 8. *Να βρεθεί η ισχυρά κλιμακωτή μορφή του πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο A^{-1} με χρήση πράξεων επί των γραμμών του.

Λύση. *Θα υπολογίσουμε ταυτόχρονα την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A και τον αντίστροφο A^{-1} του πίνακα A, αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, εκτελώντας στοιχεώδεις πράξεις στις γραμμές του A.*

$$(A \,|\, I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \to \frac{1}{4}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right) = \big(I_3 \,|\, X\big)$$

όπου

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Επομένως η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_3. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντιστροφός του είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 9. *Αν $a \in \mathbb{K}$, να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να βρεθεί η τιμή του a για τις οποίες ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Ποιός είναι τότε ο αντίστροφος του A;

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$(A \,|\, I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - a\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 9 & -a & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_2 \to -\frac{1}{3}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1-a & 9 & -a & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + (a-1)\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{28-a}{3} & \frac{-2a-1}{3} & \frac{-a+1}{3} & 1 \end{array}\right) \qquad (*)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) *Αν $a = 28$, τότε εργαζόμενοι στον πίνακα $(*)$, θα έχουμε:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & -9 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & -9 & 1 \end{array}\right) = (B \,|\, A')$$

Ο πίνακας B είναι ισχυρά γ-κλιμακωτός και επειδή $B \neq I_n$, έπεται ότι ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος, και η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) *Αν $a \neq 28$, τότε εργαζόμενοι στον πίνακα $(*)$, θα έχουμε:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{28-a}{3} & \frac{-2a-1}{3} & \frac{-a+1}{3} & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \to \frac{3}{28-a}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3(2a+1)}{3(28-a)} & \frac{3(-a+1)}{3(28-a)} & \frac{3}{28-a} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2a+1}{a-28} & \frac{a-1}{a-28)} & \frac{3}{28-a} \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \frac{1}{3}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-9}{a-28} & \frac{9}{a-28} & \frac{-1}{a-28} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2a+1}{a-28} & \frac{a-1}{a-28} & \frac{3}{28-a} \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-19}{a-28} & \frac{-9}{a-28} & \frac{1}{a-28} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-9}{a-28} & \frac{9}{a-28} & \frac{-1}{a-28} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2a+1}{a-28} & \frac{a-1}{a-28} & \frac{-3}{a-28} \end{array}\right) = (I_3 \,|\, A'')$$

όπου

$$A'' = \begin{pmatrix} \frac{-19}{a-28} & \frac{-9}{a-28} & \frac{1}{a-28} \\ \frac{a-9}{a-28} & \frac{9}{a-28} & \frac{-1}{a-28} \\ \frac{2a+1}{a-28} & \frac{a-1}{a-28} & \frac{-3}{a-28} \end{pmatrix} = \frac{1}{a-28} \begin{pmatrix} -19 & -9 & 1 \\ a-9 & 9 & -1 \\ 2a+1 & a-1 & -3 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας

$$A^{-1} = \frac{1}{a-28}\begin{pmatrix} -19 & -9 & 1 \\ a-9 & 9 & -1 \\ 2a+1 & a-1 & -3 \end{pmatrix}$$

Συνοψίζοντας δείξαμε ότι ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $a \neq 28$ και τότε ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας που δίνεται παραπάνω.

Άσκηση 10. *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή των πινάκων*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως, αν οι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι αντίστροφοί τους με χρήση πράξεων επί των γραμμών τους.

Λύση. *Για τον πίνακα A θα έχουμε:*

$$(A \,|\, I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I_4 \,|\, X)$$

Άρα η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακας A είναι ο μοναδιαίος 4×4 πίνακας I_4, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρόμοια για τον πίνακα B θα έχουμε:

$$(B \,|\, I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I_4 \,|\, Y)$$

Άρα η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακας B είναι ο μοναδιαίος 4×4 πίνακας I_4, ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και

$$B^{-1} = Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 11. *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή των πινάκων*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως, αν οι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι αντίστροφοί τους με χρήση πράξεων επί των γραμμών τους.

Λύση. *Για τον πίνακα A θα έχουμε:*

$$(A\,|\,I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = (I_4\,|\,X)$$

Άρα η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακας A είναι ο μοναδιαίος 4×4 πίνακας I_4, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρόμοια για τον πίνακα B θα έχουμε:

$$(B\,|\,I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_2 \to \frac{1}{2}\Gamma_2,\ \Gamma_4 \to \frac{1}{4}\Gamma_4]{\Gamma_1 \to -\Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4]{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (I_4\,|\,Y)$$

Άρα η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακας B είναι ο μοναδιαίος 4×4 πίνακας I_4, ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και

$$B^{-1} = Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 12. *Να βρεθεί η ισχυρή γ-κλιμακωτή μορφή των πινάκων*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως, αν οι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι αντίστροφοί τους με χρήση πράξεων επί των γραμμών τους.

Λύση. *Για τον πίνακα A θα έχουμε:*

$$(A\,|\,I_n) = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[\cdots,\ \Gamma_{n-1}\to\Gamma_{n-1}-\Gamma_n]{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2,\ \Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_3,\cdots}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_n\,|\,X)$$

Άρα η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρόμοια για τον πίνακα B θα έχουμε:

$$(B\,|\,I_n) = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_1\to\Gamma_2-\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_3}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-3} & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & (-1)^{n} & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & (-1)^{n+1} & (-1)^{n} & (-1)^{n-1} & \cdots & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = (I_n \,|\, X)$$

Άρα η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα B είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n, ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και

$$B^{-1} = X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & (-1)^{n-3} & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ (-1)^{n} & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n} & (-1)^{n-1} & \cdots & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 13. *Να δειχθεί ότι οι παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και να βρεθούν οι αντίστροφοι τους:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Για τον πίνακα A θα έχουμε*

$$(A \,|\, I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_2 \to -\frac{1}{3}\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 6\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \to \frac{1}{9}\Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right) = (A \,|\, X)$$

Άρα η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A είναι ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας I_3, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Για τον πίνακα B θα έχουμε:

$$(B \,|\, I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1,\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_2 \to -\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto[\Gamma_4\to\Gamma_4+2\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3\to\frac{1}{3}\Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_4\to\Gamma_4-5\Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_4\to3\Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_2\to\Gamma_2-6\Gamma_4,\ \Gamma_3\to\Gamma_3-\frac{1}{3}\Gamma_4]{\Gamma_1\to\Gamma_1-4\Gamma_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & -15 & 4 & 20 & -12 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -22 & 5 & 30 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_1\to\Gamma_1-3\Gamma_3]{\Gamma_2\to\Gamma_2-5\Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -12 & 4 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{\Gamma_1\to\Gamma_1-2\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right) = (B\,|\,Y)$$

Άρα η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα B είναι ο μοναδιαίος 4×4 πίνακας I_4, ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και

$$B^{-1} = Y = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 14. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 11 & 0 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του A και ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P έτσι ώστε: $PA = \Gamma(A)$. Ποιά είναι η βαθμίδα του A;

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 11 & 0 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto[\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1,\ \Gamma_4\to\Gamma_4+\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -10 & 10 & -15 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & -12 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_2\to-\frac{1}{10}\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 4 & -12 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xmapsto[\Gamma_4\to\Gamma_4-5\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3-5\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{39}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{13}{2} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_3\to\frac{1}{9}\Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{39}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{13}{2} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \xmapsto[\Gamma_2\to\Gamma_2+\Gamma_3,\ \Gamma_1\to\Gamma_1+2\Gamma_3]{\Gamma_4\to\Gamma_4-3\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_1\to\Gamma_1-3\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ έχει 3 μη-μηδενικές γραμμές και επομένως η βαθμίδα του A είναι ίση με $\mathbf{r}(A) = \gamma(A) = 3$.

Ερμηνεύοντας τις προηγηθείσες στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του A ως διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς από τα αριστερά του πίνακα A με τους αντίστοιχους στοιχειώδεις πίνακες, προκύπτει ότι θέτοντας:

$$P = E_{12}(-3)\,E_{13}(2)\,E_{23}(1)\,E_{43}(-3)\,E_3\left(\frac{1}{9}\right)\,E_{42}(-5)\,E_{32}(-5)\,E_2\left(-\frac{1}{10}\right)\,E_{41}(1)\,E_{32}(-2)\,E_{21}(-3)$$

απόκτούμε έναν 4×4 αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε $PA = \Gamma(A)$.

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι για κάθε πίνακα $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, υπάρχει αντιστρέψιμος $m\times m$ πίνακας P και αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

όπου $r = \sigma(A) = \gamma(A)$ είναι η κοινή τιμή της βαθμίδας γραμμών και της βαθμίδας στηλών του πίνακα A, και $O_{r\times(n-r)}$ είναι ο μηδενικός $r\times(n-r)$ πίνακας, $O_{(m-r)\times r}$ είναι ο μηδενικός $(m-r)\times r$ πίνακας, $O_{(m-r)\times(n-r)}$ είναι ο μηδενικός $(m-r)\times(n-r)$ πίνακας, και τέλος I_r είναι ο μοναδιαίος $r\times r$ πίνακας. Ο παραπάνω πίνακας γράφεται πιο απλά ως

$$\mathsf{K}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

και καλείται η **κανονική μορφή** του πίνακα A. Με άλλα λόγια, κάθε $m\times n$ πίνακας A μπορεί να μετατραπεί, μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές **και** στις στήλες του, σε έναν κανονικό πίνακα, ο οποίος καλείται η **κανονική μορφή** του A, και συμβολίζεται με $\mathsf{K}(A)$. Σημειώνουμε ότι ο πίνακας $\mathsf{K}(A)$ καθορίζεται πλήρως από το μέγεθος και τη βαθμίδα του πίνακα A.

Παρατήρηση. *Περιγράφουμε μια μέθοδο για την εύρεση της βαθμίδας ενός $m\times n$ πίνακα A, του αντιστρέψιμου $m\times m$ πίνακα P, και του αντιστρέψιμου $n\times n$ πίνακα Q, έτσι ώστε:*

$$PAQ = \mathsf{K}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right), \qquad \textit{όπου} \quad r = \mathbf{r}(A)$$

(1) *Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του A προσδιορίζουμε πρώτα την ισχυρή γ-κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$. Ισοδύναμα βρίσκουμε στοιχειώδεις πίνακες $E_kE_{k-1},\cdots,E_2,E_1$ έτσι ώστε, θέτοντας $P = E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1$, να έχουμε:*
$$PA = \Gamma(A)$$
Τότε ο $m\times m$ αντιστρέψιμος πίνακας που ζητάμε είναι ο P.

(2) *Το πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών του πίνακα $\Gamma(A)$ είναι η βαθμίδα του A.*

(3) *Στη συνέχεια, εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες του $\Gamma(A)$ προσδιορίζουμε την ισχυρή σ-κλιμακωτή μορφή $\Sigma(\Gamma(A))$. Ισοδύναμα βρίσκουμε στοιχειώδεις πίνακες $E'_1, E'_2,\cdots,E'_{l-1},E'_l$ έτσι ώστε, θέτοντας $Q = E'_1E'_2\cdots E'_{l-1}E'_l$, να έχουμε:*
$$\Gamma(A)Q = \Sigma(\Gamma(A)) \qquad \textit{ή ισοδύναμα} \qquad PAQ = \Sigma(\Gamma(A)$$
Τότε ο $n\times n$ αντιστρέψιμος πίνακας που ζητάμε είναι ο Q.

(4) *Ο πίνακας $\Sigma(\Gamma(A)$ είναι ισχυρά γ-κλιμακωτός και ισχυρά σ-κλιμακωτός. Επομένως η κανονική μορφή $\mathsf{K}(A)$ του A που ζητάμε $\mathsf{K}(A) = \Sigma(\Gamma(A)$.*

Θα μπορούσαμε πρώτα να προσδιορίσουμε την ισχυρά σ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A και ακολούθως την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή $\Gamma(\Sigma)(A))$ του πίνακα $\Sigma(A)$. Τότε θα έχουμε

$$\mathsf{K}(A) = \Sigma(\Gamma(A) = \Gamma(\Sigma(A))$$

Σημειώνουμε ότι οι αντιστρέψιμοι πίνακες δεν είναι μοναδικοί.

Άσκηση 15. *Να βρεθεί η κανονική μορφή του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 11 & 0 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

της Άσκησης 14. Επιπλέον να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος 5×5 πίνακας Q έτσι ώστε

$$PAQ = \mathsf{K}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Από την Άσκηση 14 γνωρίζουμε ότι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A είναι ο πίνακας*

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε θα έχουμε:

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_5 \to \Sigma_5 - \frac{1}{3}\Sigma_1]{\Sigma_4 \to \Sigma_4 - \frac{5}{3}\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_5 \to \Sigma_5 - \frac{2}{3}\Sigma_2]{\Sigma_4 \to \Sigma_4 + \frac{2}{3}\Sigma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_5 \to \Sigma_5 - \frac{1}{6}\Sigma_3]{\Sigma_4 \to \Sigma_4 + \frac{13}{6}\Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma(\Gamma(A)) = \mathsf{K}(A)$$

Ερμηνεύοντας τις προηγηθείσες στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες του $\Gamma(A)$ ως διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς από τα δεξιά του πίνακα $\Gamma(A)$ με τους αντίστοιχους στοιχειώδεις πίνακες, προκύπτει ότι θέτοντας:

$$Q = {}^tE_{41}\left(-\frac{5}{3}\right)\, {}^tE_{51}\left(-\frac{1}{3}\right)\, {}^tE_{42}\left(\frac{2}{3}\right)\, {}^tE_{52}\left(-\frac{2}{3}\right)\, {}^tE_{43}\left(\frac{13}{6}\right)\, {}^tE_{53}\left(-\frac{1}{6}\right)$$

απόκτούμε έναν 5×5 αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε $\Gamma(A)Q = \mathsf{K}(A)$. Θεωρώντας τον αντιστρέψιμο πίνακα P ο οποίος προσδιορίστηκε στην Άσκηση 14, και για τον οποίο ισχύει $PA = \Gamma(A)$, έοεται ότι θα έχουμε¨

$$PAQ = \Gamma(A)Q = \mathsf{K}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 16. *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως να βρεθεί η κανονική μορφή του πίνακα A.

Λύση. *Θα έχουμε:*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_1 \to 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 13 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 9 \\ -3 & -9 & 0 & -6 & -6 & -18 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \frac{1}{3}\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} := B$$

Ο πίνακας B είναι ισχυρά γ-κλιμακωτός και είναι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A: $\Gamma(A) = B$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_4 \to \frac{1}{2}\Sigma_4]{\Sigma_2 \to \frac{1}{3}\Sigma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3]{\Sigma_4 \to \Sigma_4 - \Sigma_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_2]{\Sigma_4 \to \Sigma_4 - \Sigma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_4 \leftrightarrow \Sigma_6]{\Sigma_3 \leftrightarrow \Sigma_5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\Sigma_4 \to \Sigma_4 - 12\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\Sigma_4 \to \Sigma_4 - 4\Sigma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\Sigma_4 \to \Sigma_4 + 3\Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := C$$

Ο πίνακας C είναι ισχυρά γ-κλιμακωτός και ισχυρά σ-κλιμακωτός. Επομένως ο πίνακας C είναι η κανονική μορφή του πίνακα A: $C = \mathsf{K}(A)$.

Άσκηση 17. *Να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή και η κανονική μορφή του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & a \end{pmatrix}$$

όπου $a \in \mathbb{K}$.

Λύση. *Θα έχουμε*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & a \end{pmatrix} \xmapsto[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & a+4 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a+7 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_2 \to \frac{1}{5}\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & a+7 \end{pmatrix}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) *Έστω $a = -7$.*

Τότε θα έχουμε ότι ο παραπάνω πίνακας είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Για την κανονική μορφή του A, θα έχουμε:

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_4 \to \Sigma_4 + \frac{3}{5}\Sigma_3]{\Sigma_4 \to \Sigma_4 - \frac{17}{5}\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - 2\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{\Sigma_2 \to \Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma(\Gamma(A)) = \mathsf{K}(A)$$

Επομένως, αν $a = -7$, τότε η βαθμίδα του πίνακα A είναι

$$\mathbf{r}(A) = 2$$

(2) *Έστω $a \neq -7$.*

Τότε $a + 7 \neq 0$ και για τον παραπάνω πίνακα θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & a+7 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_3 \to \frac{1}{a+7}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto[\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \frac{3}{5}\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 4\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Για την κανονική μορφή του A, θα έχουμε:

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - 2\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\Sigma_3 \leftrightarrow \Sigma_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Sigma(\Gamma(A)) = \mathsf{K}(A)$$

Επομένως, αν $a \neq -7$, τότε η βαθμίδα του πίνακα A είναι

$$\mathbf{r}(A) = 3$$

Δύο $m \times n$ πίνακες A και B καλούνται γ-**ισοδύναμοι** αν ο B προκύπτει από τον A μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του A. Γνωρίζουμε τότε ότι: οι πίνακες A και B είναι γ-ισοδύναμοι αν υπάρχουν στοιχειώδεις $m \times m$ πίνακες $E_1, E_2, \cdots, E_p$ έτσι ώστε: $E_p E_{p-1} \cdots E_2 E_1 A = B$.

Ορίζουμε μια σχέση «$\sim_\gamma$» στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, ως εξής: $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: $A \sim_\gamma B$ αν και μόνον αν οι πίνακες A και B είναι γ-ισοδύναμοι, δηλαδή, $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$A \sim_\gamma B \iff \text{υπάρχουν στοιχειώδεις } m \times m \text{ πίνακες } E_1, E_2, \cdots, E_p : \quad E_p E_{p-1} \cdots E_2 E_1 A = B$$

Θέτοντας $P = E_p E_{p-1} \cdots E_2 E_1$, αποκτούμε τότε έναν αντιστρέψιμο $m \times m$ πίνακα P για τον οποίο ισχύει ότι: $PA = B$. Επειδή κάθε αντιστρέψιμος πίνακας P είναι γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων, έπεται ότι:

$$A \sim_\gamma B \iff \text{υπάρχει αντιστρέψιμος } m \times m \text{ πίνακας } P : \quad PA = B$$

Άσκηση 18. (1) *Να δειχθεί ότι η σχέση «$\sim_\gamma$» στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

(2) *Να δειχθεί ότι ένας πίνακας A είναι γ-ισοδύναμος με τον μηδενικό πίνακα αν και μόνον αν $A = O$.*

(3) *Να δειχθεί ότι ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι γ-ισοδύναμος με τον I_n.*

(4) *Να δειχθεί ότι δύο τυχόντες $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες είναι πάντα γ-ισοδύναμοι.*

(5) *Να δειχθεί ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας A είναι γ-ισοδύναμος με τον πίνακα A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Λύση. (1) *Για να δείξουμε ότι η σχέση «$\sim_\gamma$» είναι σχέση ισοδυναμίας, πρέπει να δείξουμε ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.*

(α΄) *Έστω $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Επειδή ο μοναδιαίος $m \times m$ πίνακας I_m είναι αντιστρέψιμος και $I_m A = A$, έπεται ότι $A \sim_\gamma A$, και άρα η σχέση «γ» είναι ανακλαστική.*

(β΄) *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A \sim_\gamma B$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P έτυσι ώστε $PA = B$. Τότε $A = P^{-1}B$ και προφανώς ο πίνακας P^{-1} είναι αντιστρέψιμος. Αυτό σημαίνει ότι $B \sim_\gamma A$ και άρα η σχέση $\sim_\gamma$ είναι συμμετρική.*

(γ΄) *Έστω $A, B, C \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A \sim_\gamma B$ και $B \sim_\gamma C$. Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P_1 έτσι ώστε $P_1 A = B$, και ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P_2 έτσι ώστε $P_2 B = C$. Τότε θα έχουμε $P_2(P_1 A) = P_2 B = C$ ή ισοδύναμα $(P_2 P_1)A = C$. Επειδή ο πίνακας $P_2 P_1$ είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι $A \sim_\gamma C$ και επομένως η σχέση «$\sim_\gamma$» είναι μεταβατική.*

(2) *Αν ο πίνακας $A = O$, τότε προφανώς ο A είναι γ-ισοδύναμος με τον εαυτό του. Αντίστροφα, έστω ότι $A \sim_\gamma O$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $PA = O$. Τότε $A = P^{-1}O = O$.*

(3) *Γνωρίζουμε ότι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή $\Gamma(A)$ του A είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n, δηλαδή αν και μόνον αν $\Gamma(A) = I_n$. Επειδή υπάρχει αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P έτσι ώστε $PA = \Gamma(A)$, έπεται ότι $PA = I_n$, δηλαδή ο A είναι ισοδύναμος με τον I_n. Επομένως ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι γ-ισοδύναμος με τον I_n.*

(4) *Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες, τότε από το μέρος (3) έπεται ότι $A \sim_\gamma I_n$ και $B \sim_\gamma I_n$ ή ισοδύναμα $I_n \sim_\gamma B$, επειδή η σχέση «$\sim_\gamma$» είναι συμμετρική. Επειδή η σχέση «$\sim_\gamma$» είναι μεταβατική, θα έχουμε $A \sim_\gamma B$.*

(5) *Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ορίζεται ο αντίστροφός του A^{-1} και επομένως ορίζονται και οι πίνακες $A^{-n} = (A^{-1})^n$, $\forall n \geq 1$. Θέτοντας $A^0 = I_n$, έπεται ότι ορίζονται οι πίνακες A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$, οι οποίοι είναι αντιστρέψιμοι με αντίστροφο $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$. Από το μέρος (4) έπεται ότι $A \sim_\gamma A^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Δύο $m \times n$ πίνακες A και B καλούνται σ-**ισοδύναμοι** αν ο B προκύπτει από τον A μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις στήλες του A. Γνωρίζουμε τότε ότι: οι πίνακες A και B είναι σ-ισοδύναμοι αν υπάρχουν στοιχειώδεις $n \times n$ πίνακες $E_1, E_2, \cdots, E_q$ έτσι ώστε: $B = AE_1E_2 \cdots E_{q-1}E_q$.

Ορίζουμε μια σχέση «$\sim_\sigma$» στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, ως εξής: $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: $A \sim_\sigma B$ αν και μόνον αν οι πίνακες A και B είναι σ-ισοδύναμοι, δηλαδή, $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$A \sim_\sigma B \iff \text{υπάρχουν στοιχειώδεις } m \times m \text{ πίνακες } E_1, E_2, \cdots, E_q : \quad AE_1E_2 \cdots E_{q-1}E_q = B$$

Θέτοντας $Q = E_1E_2 \cdots E_{q-1}E_q$, αποκτούμε τότε έναν αντιστρέψιμο $n \times n$ πίνακα Q για τον οποίο ισχύει ότι: $B = AQ$. Επειδή κάθε αντιστρέψιμος πίνακας Q είναι γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων, έπεται ότι:

$$A \sim_\sigma B \iff \text{υπάρχει αντιστρέψιμος } n \times n \text{ πίνακας } Q : \quad B = AQ$$

Άσκηση 19. (1) *Να δειχθεί ότι η σχέση «$\sim_\sigma$» στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

(2) *Να δειχθεί ότι ένας πίνακας A είναι σ-ισοδύναμος με τον μηδενικό πίνακα αν και μόνον αν $A = O$.*

(3) *Να δειχθεί ότι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι σ-ισοδύναμος με τον I_n.*

(4) *Να δειχθεί ότι δύο τυχόντες $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες είναι πάντα σ-ισοδύναμοι.*

(5) *Να δειχθεί ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας A είναι σ-ισοδύναμος με τον πίνακα A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Λύση. *Από τον ορισμό έπεται ότι* $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$A \sim_\sigma B \iff \text{υπάρχει αντιστρέψιμος } n\times n \text{ πίνακας } Q: \quad B = AQ$$

Τότε, αν $A \sim_\sigma B$ *έπεται ότι υπάρχει αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* Q *έτσι ώστε* $B = AQ$. *Θεωρώντας ανάστροφους πίνακες, έπεται ότι για τους* $n \times m$ *πίνακες* ${}^tA$ *και* ${}^tB$ *υπάρχει αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* ${}^tQ$ *έτσι ώστε:* ${}^tB = {}^tQ\,{}^tA$, *δηλαδή προκύπτει ότι* ${}^tA \sim_\gamma {}^tB$. *Αντίστροφα, αν* ${}^tA \sim_\gamma {}^tB$, *τότε εξ' ορισμού υπάρχει αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* P *έτσι ώστε* ${}^tB = P\,{}^tA$. *Θεωρώντας ανάστροφους πίνακες έπεται ότι για τους* $m \times n$ *πίνακες* ${}^t({}^tA) = A$ *και* ${}^t({}^tB) = B$ *υπάρχει αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* ${}^tP$ *έτσι ώστε:* $B = A\,{}^tP$, *δηλαδή προκύπτει ότι* $A \sim_\sigma B$. *Επομένως:*

$$A \sim_\sigma B \iff {}^tA \sim_\gamma {}^tB$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ισοδυναμία με τα αποτελέσματα της Άσκησης 18 προκύπτουν άμεσα οι ισχυρισμοί της παρούσας Άσκησης.

Διαφορετικά:

(1) *Για να δείξουμε ότι η σχέση «*$\sim_\sigma$*» είναι σχέση ισοδυναμίας, πρέπει να δείξουμε ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.*
  (α') *Έστω* $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Επειδή ο μοναδιαίος* $n \times n$ *πίνακας* I_n *είναι αντιστρέψιμος και* $AI_n = A$, *έπεται ότι* $A \sim_\sigma A$, *και άρα η σχέση «*σ*» είναι ανακλαστική.*
  (β') *Έστω* $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *και υποθέτουμε ότι* $A \sim_\sigma B$. *Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* Q *έτσι ώστε* $AQ = B$. *Τότε* $A = BQ^{-1}$ *και προφανώς ο πίνακας* Q^{-1} *είναι αντιστρέψιμος. Αυτό σημαίνει ότι* $B \sim_\sigma A$ *και άρα η σχέση* $\sim_\sigma$ *είναι συμμετρική.*
  (γ') *Έστω* $A, B, C \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *και υποθέτουμε ότι* $A \sim_\sigma B$ *και* $B \sim_\sigma C$. *Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* Q_1 *έτσι ώστε* $AQ_1 = B$, *και ένας αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* Q_2 *έτσι ώστε* $BQ_2 = C$. *Τότε θα έχουμε* $(AQ_1)Q_2 = BQ_2 = C$ *ή ισοδύναμα* $A(Q_1Q_2) = C$. *Επειδή ο πίνακας* Q_1Q_2 *είναι αντιστρέψιμος, έπεται ότι* $A \sim_\sigma C$ *και επομένως η σχέση «*$\sim_\sigma$*» είναι μεταβατική.*

(2) *Αν ο πίνακας* $A = O$, *τότε προφανώς ο* A *είναι* σ*-ισοδύναμος με τον εαυτό του. Αντίστροφα, έστω ότι* $A \sim_\sigma O$. *Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας* Q *έτσι ώστε* $AQ = O$. *Τότε* $A = OQ^{-1} = O$.

(3) *Γνωρίζουμε ότι ένας τετραγωνικός* $n \times n$ *πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν η ισχυρά σ-κλιμακωτή μορφή* $\Sigma(A)$ *του* A *είναι ο μοναδιαίος* $n \times n$ *πίνακας* I_n, *δηλαδή αν και μόνον αν* $\Sigma(A) = I_n$. *Επειδή υπάρχει αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* Q *έτσι ώστε* $AQ = \Sigma(A)$, *έπεται ότι* $AQ = I_n$, *δηλαδή ο* A *είναι* σ*-ισοδύναμος με τον* I_n. *Επομένως ο πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι* σ*-ισοδύναμος με τον* I_n.

(4) *Αν* A, B *είναι δύο αντιστρέψιμοι* $n \times n$ *πίνακες, τότε από το μέρος (3) έπεται ότι* $A \sim_\sigma I_n$ *και* $B \sim_\sigma I_n$ *ή ισοδύναμα* $I_n \sim_\sigma B$, *επειδή η σχέση «*$\sim_\sigma$*» είναι συμμετρική. Επειδή η σχέση «*$\sim_\sigma$*» είναι μεταβατική, θα έχουμε* $A \sim_\sigma B$.

(5) *Αν ο πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος, τότε ορίζεται ο αντίστροφός του* A^{-1} *και επομένως ορίζονται και οι πίνακες* $A^{-n} = (A^{-1})^n$, $\forall n \geq 1$. *Θέτοντας* $A^0 = I_n$, *έπεται ότι ορίζονται οι πίνακες* A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$, *οι οποίοι είναι αντιστρέψιμοι με αντίστροφο* $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$. *Από το μέρος* (4) *έπεται ότι* $A \sim_\sigma A^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Δύο $m \times n$ πίνακες A και B καλούνται **ισοδύναμοι** αν ο B προκύπτει από τον A μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές και στις στήλες του A. Γνωρίζουμε τότε ότι: οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι αν υπάρχουν στοιχειώδεις $n \times n$ πίνακες $E'_1, E'_2, \cdots, E'_q$, και στοιχειώδεις $m \times m$ πίνακες $E_1, E_2, \cdots, E_p$ έτσι ώστε:έτσι ώστε:

$$E_pE_{p-1}\cdots E_2E_1\,A\,E'_1E'_2\cdots E'_{q-1}E'_q = B$$

Επειδή ένας τετραγωνικό πίνακασε είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, έπεται ότι οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε: $PAQ = B$.

Ορίζουμε μια σχέση «$\sim$» στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, ως εξής: $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$: $A \sim B$ αν και μόνον αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι, δηλαδή, $\forall A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad \text{υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακές } P \in \mathsf{M}_m(\mathbb{K}) \text{ και } Q \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \text{ έτσι ώστε : } \quad PAQ = B$$

Άσκηση 20. (1) *Να δειχθεί ότι η σχέση «$\sim$» στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

(2) *Να δειχθεί ότι ένας πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον μηδενικό πίνακα αν και μόνον αν $A = O$.*

(3) *Να δειχθεί ότι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι ισοδύναμος με τον I_n.*

(4) *Να δειχθεί ότι δύο τυχόντες $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες είναι πάντα ισοδύναμοι.*

(5) *Να δειχθεί ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον πίνακα A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Λύση. (1) *Για να δείξουμε ότι η σχέση «$\sim$» είναι σχέση ισοδυναμίας, πρέπει να δείξουμε ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.*

(α΄) *Έστω $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Επειδή ο μοναδιαίος $m \times m$ πίνακας I_m είναι αντιστρέψιμος, ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n είναι αντιστρέψιμος, και ισχύει ότι $I_m A I_n = A$, έπεται ότι $A \sim A$, και άρα η σχέση «γ» είναι ανακλαστική.*

(β΄) *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A \sim B$. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P και αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε $PAQ = B$. Τότε $A = P^{-1}BQ^{-1}$ και προφανώς οι πίνακες P^{-1} και Q^{-1} είναι αντιστρέψιμοι. Αυτό σημαίνει ότι $B \sim A$ και άρα η σχέση $\sim$ είναι συμμετρική.*

(γ΄) *Έστω $A, B, C \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A \sim B$ και $B \sim C$. Τότε: (α) υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P_1 και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q_1 έτσι ώστε $P_1 A Q_1 = B$, και (β) υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P_2 και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q_2 έτσι ώστε $P_2 B Q_2 = C$. Τότε θα έχουμε $(P_2P_1)A(Q_1Q_2) = P_2BQ_2 = C$. Επειδή οι πίνακες P_2P_1 και Q_1Q_2 είναι αντιστρέψιμοι, έπεται ότι $A \sim C$ και επομένως η σχέση «$\sim$» είναι μεταβατική.*

(2) *Αν ο πίνακας $A = O$, τότε προφανώς ο A είναι ισοδύναμος με τον εαυτό του. Αντίστροφα, έστω ότι $A \sim O$. Τότε υπάρχει υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε $PAQ = O$ και επομένως $A = P^{-1}OQ^{-1} = O$.*

(3) *Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει ο πίνακας A^{-1} και θα έχουμε $A^{-1}AI_n = I_n$. Θέτοντας $P = A^{-1}$ και $Q = I_n$, έπεται ότι $A \sim I_n$. Αντίστροφα, έστω $A \sim I_n$. Τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες P και Q έτσι ώστε $PAQ = I_n$, και επομένως $A = P^{-1}Q^{-1}$. Δηλαδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων.*

(4) *Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες, τότε από το μέρος (3) έπεται ότι $A \sim_\gamma I_n$ και $B \sim I_n$ ή ισοδύναμα $I_n \sim B$, επειδή η σχέση «$\sim$» είναι συμμετρική. Επειδή η σχέση «$\sim$» είναι μεταβατική, θα έχουμε $A \sim B$.*

(5) *Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ορίζεται ο αντίστροφός του A^{-1} και επομένως ορίζονται και οι πίνακες $A^{-n} = (A^{-1})^n$, $\forall n \geq 1$. Θέτοντας $A^0 = I_n$, έπεται ότι ορίζονται οι πίνακες A^n, $\forall n \in \mathbb{Z}$, οι οποίοι είναι αντιστρέψιμοι με αντίστροφο $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$. Από το μέρος (4) έπεται ότι $A \sim A^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Άσκηση 21. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.*

(1) *Να δειχθεί ότι:*

$$A \sim_\gamma B \quad \Longrightarrow \quad A \sim B$$

Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

(2) *Να δειχθεί ότι:*

$$A \sim_\sigma B \quad \Longrightarrow \quad A \sim B$$

Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

Λύση. (1) *Έστω ότι $A \sim_\gamma B$. Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P έτσι ώστε $PA = B$. Τότε θέτοντας $Q = I_n$, θα έχουμε $PAQ = PAI_n = PA = B$. Άρα $A \sim B$, και επομένως*

$$A \sim_\gamma B \quad \Longrightarrow \quad A \sim B$$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν είναι αληθής. Πραγματικά, θεωρούμε τον 2×3 *πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Επιπλέον:

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - 2\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{K}(A)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$A \sim \mathsf{K}(A)$$

Αν $A \sim_\gamma \mathsf{K}(A)$, *τότε υπάρχει αντιστρέψιμος* 2×2 *πίνακας* $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *έτσι ώστε:* $PA = \mathsf{K}(A)$. *Όμως*

$$PA = \mathsf{K}(A) \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a & 2a & a+b \\ c & 2c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή καταλήγουμε στο άτοπο $a = 1$ *και* $2a = 0$. *Άρα ο πίνακας* A *δεν είναι* γ*-ισοδύναμος με τον* $\mathsf{K}(A)$. *Επομένως*

$$A \sim B \quad \not\Longrightarrow \quad A \sim_\gamma B$$

(2) *Έστω ότι* $A \sim_\sigma B$. *Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* Q *έτσι ώστε* $AQ = B$. *Τότε θέτοντας* $P = I_m$, *θα έχουμε* $PAQ = I_m AQ = AQ = B$. *Άρα* $A \sim B$, *και επομένως*

$$A \sim_\sigma B \quad \Longrightarrow \quad A \sim B$$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν είναι αληθής. Πραγματικά, θεωρούμε τον 3×2 *πίνακα*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\Sigma_1 \to \Sigma_1 - \Sigma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_2 \to \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{K}(B)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$B \sim \mathsf{K}(B)$$

Αν $B \sim_\sigma \mathsf{K}(B)$, *τότε υπάρχει αντιστρέψιμος* 2×2 *πίνακας* $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *έτσι ώστε:* $AB = \mathsf{K}(B)$. *Όμως*

$$BQ = \mathsf{K}(A) \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή καταλήγουμε στο άτοπο $a = 1$ *και* $2a = 0$. *Άρα ο πίνακας* B *δεν είναι* σ*-ισοδύναμος με τον* $\mathsf{K}(B)$. *Επομένως γενικά*

$$A \sim B \quad \not\Longrightarrow \quad A \sim_\sigma B$$

Άσκηση 22. *Να δειχθεί ότι δύο* $m \times n$ *πίνακες είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν έχουν την ίδια βαθμίδα*[1]*:*

$$\forall A, B \in \mathsf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) : \quad \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B) \implies A \sim B$$

---

[1]Θα δείξουμε αργότερα με χρήση γραμμικών απεικονίσεων ότι:

$$\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B) \iff A \sim B$$

Λύση. *Γνωρίζουμε ότι κάιθε πίνακας είναι ισοδύναμος με την κανονική του μορφή. Επομένως θα έχουμε:*

$$A \sim \mathsf{K}(A) \quad \text{και} \quad B \sim \mathsf{K}(B)$$

Επειδή

$$\mathsf{K}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \quad \text{και} \quad r = \mathbf{r}(A)$$

και

$$\mathsf{K}(B) = \left(\begin{array}{c|c} I_{r'} & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \quad \text{και} \quad r' = \mathbf{r}(B)$$

Επειδή $\mathbf{r}(A) = r = r' = \mathbf{r}(B)$, *έπεται ότι* $\mathsf{K}(A) = \mathsf{K}(B) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$ *και επομένως θα έχουμε*

$$A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \quad \text{και} \quad B \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

Επειδή η σχέση "$\sim$", ως σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $m \times n$ πινάκων, είναι συμμετρική και μεταβατική, θα έχουμε:

$$A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \quad \text{και} \quad \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \sim B \quad \Longrightarrow \quad A \sim B$$

Άσκηση 23. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $\mathbf{r}(A) = r$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες $B \in \mathsf{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$ και $C \in \mathsf{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:*

$$A = B\,C$$

Λύση. *Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι ισοδύναμος με την κανονική του μορφή* $\mathsf{K}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, *όπου* $r = \mathbf{r}(A)$. *Επομένως υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q έτσι ώστε* $PAQ = \mathsf{K}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$. *Θεωρούμε τους πίνακες*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{m\times r}(\mathbb{K}) \quad \text{και} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{r\times n}$$

και υπολογίζουμε εύκολα ότι:

$$XY = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

Τότε θα έχουμε

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) = XY \quad \Longrightarrow \quad A = P^{-1}XYQ^{-1} = (P^{-1}X)(YQ^{-1})$$

Θέτοντας

$$B = P^{-1}X \in \mathsf{M}_{m\times r}(\mathbb{K}) \quad \text{και} \quad C = YQ^{-1} \in \mathsf{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$$

θα έχουμε

$$A = B\,C$$

Άσκηση 24. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

Λύση. *Έχουμε:*

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-3\\2&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad (A\,|\,B)=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\2&1&-2&1\\1&1&1&3\end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχιώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ)*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&-1\\2&1&-2&1\\1&1&1&3\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&-1\\0&-1&4&3\\0&0&4&4\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_3\to\frac{1}{4}\Gamma_3]{\Gamma_2\to-\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&-1\\0&1&-4&-3\\0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2]{\Gamma_2\to\Gamma_2+4\Gamma_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma')\quad\begin{cases}x_1+0x_2+0x_3=1\\0x_1+x_2+0x_3=1\\0x_1+0x_2+x_3=1\end{cases}$$

το οποίο έχει προφανή λύση την $x_1=x_2=x_3=1$. *Επειδή το* (Σ') *είναι ισοδύναμο με το* (Σ), *έπεται ότι το* (Σ) *έχει μοναδική λύση την:*

$$x_1=1,\quad x_2=1,\quad x_3=1$$

Άσκηση 25. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=2\\2x_1-3x_2+4x_3=4\\4x_1+x_2-6x_3=8\end{cases}$$

Λύση. *Έχουμε:*

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-5\\2&-3&4\\4&1&-6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad (A\,|\,B)=\begin{pmatrix}1&2&-5&|&2\\2&-3&4&|&4\\4&1&-6&|&8\end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχιώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ)*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&2\\2&-3&4&4\\4&1&-6&8\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-4\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&2\\0&-7&14&0\\0&-7&14&0\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&2\\0&-7&14&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_2\to-\frac{1}{7}\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&2\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-2\Gamma_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma')\quad\begin{cases}x_1+0x_2-x_3=2\\0x_1+x_2-2x_3=0\\0x_1+0x_2+0x_3=0\end{cases}$$

Για το (Σ') *έχουμε:* $x_2=2x_3$ *και* $x_1=2-x_3$. *Θέτουμε* $x_3=\lambda$ *(αυθαίρετη τιμή από το σώμα* $\mathbb{K}$*), και τότε έπεται ότι το σύτστημα* (Σ') *έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο* $\lambda\in\mathbb{K}$*), τις εξής:* $x_1=2+\lambda$, $x_2=2\lambda$, $x_3=\lambda$. *Επειδή το σύστημα* (Σ') *είναι ισοδύναμο με το* (Σ), *έπεται ότι το σύτστημα* (Σ) *έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο* $\lambda\in\mathbb{K}$*), τις εξής:*

$$x_1=2+\lambda,\quad x_2=2\lambda,\quad x_3=\lambda,\quad(\lambda\in\mathbb{K})$$

Άσκηση 26. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} 2x_1 &+& 3x_2 &-& x_3 &+& x_4 &=& 0\\ 8x_1 &+& 12x_2 &-& 9x_3 &+& 8x_4 &=& 0\\ 4x_1 &+& 6x_2 &+& 3x_3 &-& 2x_4 &=& 0\\ 2x_1 &+& 3x_2 &+& 9x_3 &+& -7x_4 &=& 0 \end{cases}$$

Λύση. *Έχουμε:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1\\ 8 & 12 & -9 & 8\\ 4 & 6 & 3 & -2\\ 2 & 3 & 9 & -7 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix},\quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & | & 0\\ 8 & 12 & -9 & 8 & | & 0\\ 4 & 6 & 3 & -2 & | & 0\\ 2 & 3 & 9 & -7 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή ο πίνακας των σταθερών όρων είναι ο μηδενικός εργαζόμαστε Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα A των συντελεστών (Σ):

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1\\ 8 & 12 & -9 & 8\\ 4 & 6 & 3 & -2\\ 2 & 3 & 9 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1,\ \Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-4\Gamma_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -4\\ 0 & 0 & 10 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4+2\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1\to\frac{1}{2}\Gamma_1]{\Gamma_2\to-\frac{1}{5}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1+\frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{10}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος του συστήματος

$$(\Sigma')\quad \begin{cases} x_1 &+& \frac{3}{2}x_2 &+& 0x_3 &+& \frac{1}{10}x_4 &=& 0\\ 0x_1 &+& 0x_2 &+& x_3 &-& \frac{4}{5}x_4 &=& 0\\ 0x_1 &+& 0x_2 &+& 0x_3 &+& 0x_4 &=& 0\\ 0x_1 &+& 0x_2 &+& 0x_3 &+& 0x_4 &=& 0 \end{cases}$$

Για το (Σ') έχουμε: $x_3 = \frac{4}{5}x_4$ και $x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4$. Θέτοντας

$$x_2 = \lambda \quad \text{και} \quad x_4 = \mu \quad (\text{αυθαίρετες τιμές από το σώμα } \mathbb{K})$$

έπεται ότι το (Σ') έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από δύο παραμέτρους $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $x_1 = -\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{10}\mu$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \frac{4}{5}\mu$, $x_4 = \mu$. Επειδή το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με το (Σ'), έπεται ότι το (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από δύο παραμέτρους $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, τις εξής:

$$x_1 = -\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{10}\mu,\quad x_2 = \lambda,\quad x_3 = \frac{4}{5}\mu,\quad x_4 = \mu \quad (\lambda,\ \mu \in \mathbb{K})$$

Άσκηση 27. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} x_1 &-& x_2 &+& x_3 && &-& x_5 &=& 0\\ -x_1 &+& x_2 &-& x_3 &+& x_4 && &=& 0\\ x_1 &-& x_2 &+& x_3 &+& x_4 && &=& \lambda\\ -4x_1 &+& 4x_2 &-& 4x_3 &-& x_4 &+& x_5 &=& -\lambda \end{cases}$$

Λύση. *Έχουμε:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0\\0\\\lambda\\-\lambda \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix}$$

$$(A\,|\,B)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & | & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & | & \lambda\\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & | & -\lambda \end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ)*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & | & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & | & \lambda\\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & | & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2+\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & \lambda\\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & | & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4+4\Gamma_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & \lambda\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & | & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4+\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & \lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & | & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4+2\Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & \lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3\to\frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{\lambda}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \lambda \end{pmatrix}$$

και άρα καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0\\ x_4 - x_5 = 0\\ x_5 = \frac{\lambda}{2}\\ 0 = \lambda \end{cases}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) *Αν* $\lambda \neq 0$ *τότε έπεται ότι το σύστημα* (Σ) *είναι αδύνατο.*

(2) *Αν* $\lambda = 0$ *τότε έχουμε* $x_5 = 0$ *και άρα* $x_4 = 0$. *Ακόμα, από την πρώτη εξίσωση έχουμε* $x_1 = x_2 - x_3$. *Θέτουμε* $x_2 = \kappa$ *και* $x_3 = \nu$ *με* $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$. *Τότε έχουμε τη γενική λύση:*

$$\begin{cases} x_1 = \kappa - \nu\\ x_2 = \kappa\\ x_3 = \nu \qquad\qquad \kappa, \nu \in \mathbb{R}.\\ x_4 = 0\\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 28. *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1-2\lambda\\ x_2 + x_3 = -2\lambda\\ x_4 - x_5 = 1-\lambda\\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2-2\lambda \end{cases}$$

Λύση. *Έχουμε:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1-2\lambda\\ -2\lambda\\ 1-\lambda\\ 2-2\lambda \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$(A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & | & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2-2\lambda \end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ)*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & | & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2-2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & | & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & | & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

και άρα καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 1-2\lambda \\ & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & -2\lambda \\ & & & & & & x_4 & - & x_5 & = & 1-\lambda \\ & & & & & & & & 0 & = & 1+\lambda \end{array} \right.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) *Αν* $\lambda \neq -1$ *τότε το σύστημα* (Σ) *είναι αδύνατο.*
(2) *Για* $\lambda = -1$ *έχουμε το σύστημα:*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\ & & & & & & x_4 & - & x_5 & = & 2 \end{array} \right.$$

Συνεπώς έχουμε ότι $x_2 = 2 - x_3$, $x_4 = 2 + x_5$ *και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε* $x_1 = -1 - x_3 + x_5$. *Θέτουμε* $x_3 = \nu$ *και* $x_5 = \kappa$ *με* $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$. *Τότε έχουμε τη γενική λύση:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -1 - \nu + \kappa \\ x_2 = 2 - \nu \\ x_3 = \nu \\ x_4 = 2 + \kappa \\ x_5 = \nu \end{array} \right. \qquad \kappa, \nu \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 29. *Αν* $\lambda \in \mathbb{R}$, *να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:*

$$(\Sigma):\ \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & - & x_6 & + & 0x_7 & = & 0 \\ 0x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & x_5 & - & x_6 & + & 0x_7 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & - & 2x_6 & + & x_7 & = & 1 \\ x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & + & 0x_7 & = & -\lambda \end{array} \right.$$

Λύση. *Ο πίνακας συντελεστών και ο πίνακας σταθερών όρων του συστήματος* (Σ) *είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στον επαυξημένο πίνακα $(A\,|\,B)$:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & | & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος (Σ'):

$$(\Sigma') : \begin{cases} x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & + & 0x_7 & = & -1 \\ 0x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & x_5 & - & x_6 & + & 0x_7 & = & 1 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & - & 0x_6 & + & x_7 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & + & 0x_7 & = & 1-\lambda \end{cases}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ).

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) *Αν* $\lambda \neq 1$ *τότε* $1-\lambda \neq 0$, *ο τελευταίος πίνακας τότε η τελευταία εξίσωση του* (Σ') *είναι αδύνατη διότι θα έχουμε* $0 = (1-\lambda \neq 0$. *Επομένως το* (Σ') *και άρα και το* (Σ) *είναι αδύνατο.*

(2) *Έστω* $\lambda = 1$. *Τότε το* (Σ') *είναι της μορφής (παραλείπουμε τους άγνωστους με μηδενικό συντελεστή):*

$$\begin{cases} x_1 & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_2 & + & x_5 & - & x_6 & = & 1 \\ x_7 & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 & = & -1 - x_3 - x_4 \\ x_2 & = & 1 - x_5 + x_6 \\ x_7 & = & 0 \end{cases}$$

Θέτουμε

$$x_3 = \kappa, \quad x_4 = \lambda, \quad x_5 = \mu, \quad x_6 = \nu$$

να είναι αυθαίρετες τιμές από το σώμα $\mathbb{K}$, *έπεται ότι το σύστημα* (Σ'), *άρα και το ισοδύναμό του σύσταμ* (Σ), *έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από 4 παραμέτρους:*

Επομένως η γενική λύση του συστήματος (Σ) *είναι*

$$\begin{cases} x_1 = -1 - \kappa - \xi \\ x_2 = 1 - \mu + \nu \\ x_3 = \kappa \\ x_4 = \xi \\ x_5 = \mu \\ x_6 = \nu \\ x_7 = 0 \end{cases} \qquad \kappa, \xi, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 30. *Να λυθεί το σύστημα* $(\lambda \in \mathbb{R})$:

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \end{cases}$$

Λύση. *Έχουμε:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & | & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & | & \lambda \end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχιώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ):

$$(A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & | & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & | & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma 1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & \lambda - 1 & | & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 & | & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) *Αν* $\lambda+1=0$*, δηλαδή* $\lambda=-1$*, τότε ο τελευταίος πίνακας είναι της μορφής:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι ο επαυξημένος ενός συστήματος (Σ') *ισοδύναμου με το* (Σ)*. Επειδή προφανώς το* (Σ') *είναι αδύνατο (η τελευταία εξίσωση του είναι της μορφής* $0x+0y+0z=-4$*), έπεται ότι το* (Σ) *είναι αδύνατο.*

(2) *Αν* $\lambda+1\neq 0$*, δηλαδή* $\lambda\neq -1$*, τότε εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του τελευταίου πίνακα:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & \lambda-1 & | & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & | & \lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3\to\frac{1}{\lambda+1}\Gamma_3]{\Gamma_2\to\frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2]{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\lambda+1}{2} & | & 2 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & | & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda+1}{2} & | & \frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1} \end{pmatrix}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α΄) *Αν* $-\frac{-\lambda+1}{2}=0$*, δηλαδή αν* $\lambda=1$*, τότε ο τελευταίος πίνακας είναι της μορφής*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

και είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma'') \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 0y & + & z & = & 2 \\ 0x & + & y & + & 0z & = & -1 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{array} \right.$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το σύστημα (Σ)*. Θέτοντας* $z=\kappa$ *να είναι μια αυθαίρετη τιμή από το σώμα* $\mathbb{K}$*, έπεται ότι το* (Σ'') *έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο* $\kappa\in\mathbb{K}$*:* $x=2-\kappa$*,* $y=-1$*,* $z=\kappa$*. Επειδή το* (Σ'') *είναι ισοδύναμο με το* (Σ)*, έπεται ότι το* (Σ) *έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο, τις εξής:*

$$x=2-\kappa, \quad y=-1, \quad z=\kappa \quad (\kappa\in\mathbb{K})$$

(β΄) *Αν* $-\frac{-\lambda+1}{2}\neq 0$*, δηλαδή αν* $\lambda\neq 1$*, τότε ο τελευταίος πίνακας είναι της μορφής*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\lambda+1}{2} & | & 2 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & | & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda+1}{2} & | & \frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3\to\frac{2}{-\lambda+1}\Gamma_3]{\Gamma_2\to\Gamma_2+\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\lambda+1}{2} & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{4}{\lambda+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\frac{\lambda+1}{2}\Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{4}{\lambda+1} \end{pmatrix}$$

ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma''') \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 0y & + & z & = & 4 \\ 0x & + & y & + & 0z & = & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ 0x & + & 0y & + & z & = & -\frac{4}{\lambda+1} \end{array} \right.$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το σύστημα (Σ)*. Προφανώς το* (Σ'') *έχει μοναδική λύση την* $x=4$*,* $y=\frac{\lambda-3}{\lambda+1}$*,* $z=-\frac{4}{\lambda+1}$*. Επειδή το* (Σ''') *είναι ισοδύναμο με το* (Σ)*, έπεται ότι το* (Σ) *έχει μοναδική λύση, την εξής:*

$$x=4, \quad y=\frac{\lambda-3}{\lambda+1}, \quad z=-\frac{4}{\lambda+1}$$

Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι το σύστημα (Σ) *είναι:*

(1) *Είναι* **αδύνατο**, *αν* $\lambda = -1$.

(2) *Έχει* **άπειρες λύσεις**, *αν:* $\lambda \neq -1$ *και* $\lambda = 1$. *Οι άπειρες λύσεις του* (Σ) *εξαρτώνται από μια παράμετρο και είναι οι εξής:*

$$x = 2 - \kappa, \quad y = -1, \quad z = \kappa \quad (\kappa \in \mathbb{K})$$

(3) *Έχει* **μοναδική λύση**, *αν* $\lambda \neq 1$ *και* $\lambda \neq -1$. *Η μοναδική λύση του* (Σ) *είναι η εξής:*

$$x = 4, \quad y = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}, \quad z = -\frac{4}{\lambda + 1}$$

Άσκηση 31. *Αν* $a, b \in \mathbb{R}$, *να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & -6a \\ 2x & + & y & + & (b+1)z & = & 4 \\ bx & + & 3y & + & 2z & = & 3a \end{array} \right.$$

Λύση. *Έχουμε:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & (b+1) \\ b & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6a \\ 4 \\ 3a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (A \,|\, B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & -6a \\ 2 & 1 & (b+1) & | & 4 \\ b & 3 & 2 & | & 3a \end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχιώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ)*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 2 & 1 & (b+1) & 4 \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 0 & 0 & b & 4+6a \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & b & 4+6a \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array} \right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) $b = 0$. *Τότε ο τελευταίος πίνακας είναι ο*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 4+6a \\ 0 & 3 & 2 & 3a \end{array} \right)$$

ο οποίος είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & -3a \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 4+6a \\ 0x & + & 3y & + & 2z & = & 3a \end{array} \right.$$

Από το οποίο βλέπουμε ότι:

(α΄) *Αν* $4+6a \neq 0$, *δηλαδή αν* $a \neq -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$, *τότε το* (Σ') *είναι αδύνατο. Επειδή το* (Σ) *είναι ισοδύναμο με το* (Σ'), *έπεται ότι αν* $a \neq -\frac{2}{3}$, *τότε το* (Σ) *είναι αδύνατο.*

(β΄) *Αν Αν* $4 + 6a = 0$, *δηλαδή αν* $a = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$, *τότε ο επαυξημένος πίνακας του* (Σ') *είναι*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma'') \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 0y & + & \frac{1}{6}z & = & \frac{1}{7} \\ 0x & + & y & + & \frac{2}{3}z & = & -\frac{2}{3} \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{array} \right.$$

Από το οποίο βλέπουμε ότι: $y = -\frac{2}{3}(1+z)$ *και* $x = \frac{1}{7} - \frac{1}{6}z$. *Θέτοντας* $z = \lambda$, *(αυθαίρετη τιμή από το σώμα* $\mathbb{K}$*), έπεται ότι το σύστημα* (Σ'') *έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο* $\lambda \in \mathbb{K}$: $x = \frac{1}{7} - \frac{1}{6}\lambda$, $y = -\frac{2}{3}(1+\lambda)$, $z = \lambda$. *Επειδή το* (Σ'') *είναι ισοδύναμο με το* (Σ') *και το*

(Σ') *είναι ισοδύναμο με το* (Σ)*,έπεται ότι το* (Σ) *έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο* $\lambda \in \mathbb{K}$*, τις εξής:*

$$x = \frac{1}{7} - \frac{1}{6}\lambda, \quad y = -\frac{2}{3}(1+\lambda), \quad z = \lambda, \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

(2) *Αν* $b \neq 0$. *Τότε:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & b & 4+6a \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ b & 3 & 2 & 3a \\ 0 & 0 & b & 4+6a \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{b}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - b\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 3-\frac{b}{2} & 2-\frac{b}{2} & 3a+3ab \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & \frac{6-b}{2} & \frac{4-b}{2} & 3a+3ab \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array}\right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α΄) *Αν* $b = 6$*, τότε έχουμε τον πίνακα:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & -1 & 21a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2+3a}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & -1 & 21a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+69a}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to -\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & 1 & -21a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+69a}{3} \end{array}\right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) *Αν* $\frac{2+69a}{3} \neq 0$*, δηλαδή αν* $a \neq -\frac{2}{69}$*, τότε το* (Σ) *είναι αδύνατο, καθώς ο παραπάνω πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος το οποίο είναι ισοδύναμο με το* (Σ) *και ειναι προφανώς αδύνατο.*

(ii) *Αν* $\frac{2+69a}{3} = 0$*, δηλαδή αν* $a = -\frac{2}{69}$*, τότε ο τελευταίος πίνακας είναι:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3\cdot(-\frac{2}{69}) \\ 0 & 0 & 1 & -21\cdot(-\frac{2}{69}) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+69a}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{23} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο πίνακας του επαυξημένου συστήματος

$$(\Sigma''') \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & \frac{2}{23} \\ 0x & + & 0y & + & z & = & -\frac{14}{23} \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{array}\right.$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ) *και το οποίο έχει άπειρες λύσεις:* $z = -\frac{14}{23}$*, και* $x = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{2}{23}$*, όπου* λ *είναι μια αυθαίρετη παράμετρος από το σώμα* $\mathbb{K}$*. Επομένως το* $(\Sigma$ *έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

$$x = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{2}{23}, \quad y = \lambda, \quad z = -\frac{14}{23}, \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

(β΄) *Αν* $b \neq 6$*, τότε:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & \frac{6-b}{2} & \frac{4-b}{2} & 3a+3ab \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{2}{6-b}\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 1 & \frac{4-b}{6-b} & \frac{6a+6ab}{6-b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{6-b} & -\frac{42a}{6-b} \\ 0 & 1 & \frac{4-b}{6-b} & \frac{6a+6ab}{6-b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array}\right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο πίνακας του επαυξημένου συστήματος

$$(\Sigma'''') \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 0y & + & \frac{1}{6-b}z & = & -\frac{42a}{6-b} \\ 0x & + & y & + & \frac{4-b}{6-b}z & = & \frac{6a+6ab}{6-b} \\ 0x & + & 0y & + & z & = & \frac{4+6a}{b} \end{array}\right.$$

το οποίο είναι ισοδυναμο με το (Σ) *και έχει μοναδική λύση:* $z = \frac{4+6a}{b}$, $y = \frac{6a+6ab}{6-b} - \frac{4-b}{6-b} \cdot \frac{4+6a}{b} = \frac{12ab+6ab^2+4b-24a-16}{b(6-b)}$, $x = -\frac{42a}{6-b} - \frac{1}{6-b} \cdot \frac{4+6a}{b} = \frac{-42ab-4-6a}{b(6-b)}$. *Επειδή το* (Σ'''') *είναι ισοδύναμο με το* (Σ), *έπεται ότι το* (Σ) *έχει μοναδική λύση*

$$x = -\frac{42ab+6a+4}{b(6-b)}, \qquad y = \frac{12ab+6ab^2+4b-24a-16}{b(6-b)}, \qquad z = \frac{4+6a}{b}$$

Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι το σύστημα (Σ) *είναι:*

(1) *Είναι* **αδύνατο**, *αν:*

$$\begin{cases} b = 0 \\ \text{και} \\ a \neq -\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \text{ή} \qquad \begin{cases} b = 6 \\ \text{και} \\ a \neq -\frac{2}{69} \end{cases}$$

(2) *Έχει* **μοναδική λύση**, *αν:* $b \neq 0$ *και* $b \neq 6$. *Τότε η μοναδική λύση του* (Σ) *είναι:*

$$x = -\frac{42ab+6a+4}{b(6-b)}, \qquad y = \frac{12ab+6ab^2+4b-24a-16}{b(6-b)}, \qquad z = \frac{4+6a}{b}$$

(3) *Έχει* **άπειρες λύσεις**, *αν:*

(α') *Είτε* $b = 0$ *και* $a = -\frac{2}{3}$. *Τότε οι λύσεις του* (Σ) *είναι της μορφής:*

$$x = \frac{1}{7} - \frac{1}{6}\lambda, \qquad y = -\frac{2}{3}(1+\lambda), \qquad z = \lambda, \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$$

(β') *Είτε* $b = 6$ *και* $a = -\frac{2}{69}$. *Τότε οι λύσεις του* (Σ) *είναι της μορφής:*

$$x = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{2}{23}, \qquad y = \lambda, \qquad z = -\frac{14}{23}, \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$$

Άσκηση 32. *Να βρεθεί η ισχυρά* γ*-κλιμακωτή και η κανονική μορφή του πίνακα*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$AX = B, \qquad \text{όπου} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ 5 & 8 & 9 & 10 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Λύση. *Για την ισχυρά* γ*-κλιμακωτή μορφή του πίνακα* C, *Θα έχουμε*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 10 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xmapsto[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 4\Gamma_1,\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 - 5\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -11 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & -10 & -22 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[\Gamma_5 \to \Gamma_5 + 2\Gamma_3]{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\Gamma_3 \to -\Gamma_3]{\Gamma_2 \to -\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_1\to\Gamma_1-2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Προφανώς ο τελευταίος πίνακας είναι η ισχυρή Γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα C:

$$\Gamma(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για την κανονική μορφή του πίνακα C, Θα έχουμε:

$$\Gamma(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_6\to\Sigma_6+7\Sigma_1]{\Sigma_5\to\Sigma_5-4\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[\Sigma_5\to\Sigma_5+10\Sigma_2,\ \Sigma_6\to\Sigma_6-7\Sigma_2]{\Sigma_4\to\Sigma_4+\Sigma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_5\to\Sigma_5-7\Sigma_3,\ \Sigma_6\to\Sigma_6+2\Sigma_3]{\Sigma_4\to\Sigma_4-2\Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Προφανώς ο τελευταίος πίνακας είναι η κανονική μορφή του πίνακα C:

$$\mathsf{K}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για την επίλυση του γραμμικού συστήματος (Σ): $AQ = B$, παρατηρούμε ότι ο πεαυξημένος πίνακας του συστήματος (Σ) είναι ο πίνακας C:

$$(A\,|\,B) = C$$

Επομένως θα έχουμε ότι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του $(A\,|\,B)$ είναι ο πίνακας

$$\Gamma(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ο οποίος είναι ομεπαυξημένος πίνακας ενός συστήματος (Σ') ισοδύναμου με το αρχικό:

$$(\Sigma') \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 4x_5 & = & -7 \\ 0x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & + & -x_4 & + & -10x_5 & = & 7 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 7x_5 & = & -2 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

δηλαδή

$$(\Sigma')\qquad \begin{cases} x_1+4x_5 &= -7\\ x_2-x_4-10x_5 &= 7\\ x_3+2x_4+7x_5 &= -2 \end{cases}$$

και το οποίο έχει την ακόλουθη γενική λύση: θέτουμε

$$x_4=r \quad \text{και} \quad x_5=s$$

να είναι αυθαίρετα στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ και τότε:

$$\begin{cases} x_1=-7-4s\\ x_2=7+r+10s\\ x_3=-2-2r-7s \qquad\qquad r,s\in\mathbb{K}\\ x_4=r\\ x_5=s \end{cases}$$

Η παραπάνω είναι και η γενική λύση του αρχικού συστήματος (Σ). Ιδιαίτερα προκύπτει ότι το (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από δύο αυθαίρετες παραμέτρους.

Άσκηση 33. *Θεωρούμε τον 4×5 πίνακα*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 4\\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2\\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος 5×5 πίνακας Q έτσι ώστε ο πίνακας PAQ να είναι ισχυρά γ-κλιμακωτός και ισχυρά σ-κλιμακωτός, δηλαδή ο πίνακας PAQ είναι η κανονική μορφή του πίνακα A.

Ακολούθως να λυθεί το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$(\Sigma)\qquad AX=O, \qquad \text{όπου} \qquad O=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Λύση. 1. *Για την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A, θα έχουμε:*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 4\\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2\\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4\\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2\\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3\\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4\\ 4 & -1 & 3 & -2 & -2\\ 5 & 4 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xmapsto[\Gamma_3\to\Gamma_3-4\Gamma_1,\ \Gamma_4\to\Gamma_4-5\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 7 & -1 & 2 & 10\\ 0 & 7 & -1 & 2 & 10\\ 0 & 14 & -2 & 4 & 21 \end{pmatrix} \xmapsto[\Gamma_4\to\Gamma_4-2\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 7 & -1 & 2 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto[\Gamma_3\leftrightarrow\Gamma_4]{\Gamma_2\to\frac{1}{7}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{10}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\Gamma_1\to\Gamma_1+2\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{10}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\Gamma_2\to\Gamma_2-\frac{10}{7}\Gamma_3]{\Gamma_1\to\Gamma_1+\frac{1}{7}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι προφανώς η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A:

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ερμηνεύοντας τις προηγηθείσες στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του A ως διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς από τα αριστερά του πίνακα A με τους αντίστοιχους στοιχειώδεις πίνακες, προκύπτει ότι θέτοντας:

$$P = E_{13}\left(\frac{1}{7}\right) E_{23}\left(\frac{10}{7}\right) E_{12}(2)\, E_2\left(\frac{1}{7}\right) E_{34}\, E_{32}(-1)\, E_{42}(-2)\, E_{21}(-2)\, E_{31}(-4)\, E_{41}(-5)\, E_{12}(-1)E_{12}$$

αποκτούμε έναν 4×4 αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε $PA = \Gamma(A)$.

2. *Για την κανονική μορφή του πίνακα A, θα έχουμε:*

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_4 \to \Sigma_4 + \frac{3}{7}\Sigma_1]{\Sigma_3 \to \Sigma_3 + \frac{9}{7}\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_4 \to \Sigma_4 - \frac{2}{7}\Sigma_2]{\Sigma_3 \to \Sigma_3 + \frac{1}{7}\Sigma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\Sigma_3 \leftrightarrow \Sigma_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι προφανώς η κανονική μορφή του πίνακα A:

$$\mathsf{K}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ερμηνεύοντας τις προηγηθείσες στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες του $\Gamma(A)$ ως διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς από τα δεξιά του πίνακα A με τους αντίστοιχους στοιχειώδεις πίνακες, προκύπτει ότι θέτοντας:

$$Q = {}^tE_{31}\left(\frac{9}{7}\right) {}^tE_{41}\left(\frac{3}{7}\right) {}^tE_{32}\left(\frac{1}{7}\right) {}^tE_{42}\left(-\frac{2}{7}\right) {}^tE_{35}$$

αποκτούμε έναν 5×5 αντιστρέψιμο πίνακα Q έτσι ώστε $\Gamma(A)Q = \mathsf{K}(A)$, και τότε θα έχουμε: $PAQ = \mathsf{K}(A)$.

3. *Για το ομογενές γραμμικό σύστημα (Σ): $AQ = O$, θα έχουμε το ισοδύναμο ομογενές γραμμικό σύστημα $\Gamma(A)X = O$, δηλαδή:*

$$(\Sigma') \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - \frac{9}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4 & = & 0 \\ x_2 - \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 & = & 0 \\ x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

και το οποίο έχει την ακόλουθη γενική λύση: θέτουμε

$$x_3 = r \quad \textit{και} \quad x_4 = s$$

να είναι αυθαίρετα στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ και τότε:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}r + \frac{3}{7}s \\ x_2 = \frac{1}{7}r - \frac{2}{7}s \\ x_3 = r & \qquad r, s \in \mathbb{K} \\ x_4 = s \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Η παραπάνω είναι και η γενική λύση του αρχικού συστήματος (Σ). Ιδιαίτερα προκύπτει ότι το (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από δύο αυθαίρετες παραμέτρους.