

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

## ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 26 Νοεμβρίου 2021

**Άσκηση 1.** Έστω  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  και

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$$

Να βρεθεί η διάσταση  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$  και μια βάση του  $\mathbb{R}^n$  η οποία περιέχει μια βάση του  $\mathcal{V}$ .

**Λύση.** Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

(1) Αν τα  $\alpha_i = 0$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ , τότε προφανώς  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  και άρα  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n$ .

(2) Έστω ότι  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $\alpha_1 \neq 0$  και τότε

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \left\{ \left( -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n, x_2, \dots, x_n \right) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_2 \left( -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1, 0, \dots, 0 \right) + x_3 \left( -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, 0, 1, \dots, 0 \right) + \dots + x_n \left( -\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, 0, \dots, 0, 1 \right) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \left( -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1, 0, \dots, 0 \right), \left( -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, 0, 1, \dots, 0 \right), \dots, \left( -\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, 0, \dots, 0, 1 \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\vec{e}_1 = \left( -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1, 0, \dots, 0 \right), \quad \vec{e}_2 = \left( -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, 0, 1, \dots, 0 \right), \quad \dots, \quad \vec{e}_{n-1} = \left( -\frac{\alpha_n}{\alpha_1}, 0, \dots, 0, 1 \right)$$

Άρα από την παραπάνω περιγραφή του  $\mathcal{V}$  έχουμε ότι τα διανύσματα  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$  παράγουν τον  $\mathcal{V}$ .

Έστω  $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{e}_{n-1} = \vec{0}$  με  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ . Τότε έπεται εύκολα ότι  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$  και άρα τα διανύσματα  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως, το σύνολο  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}\}$  αποτελεί βάση του  $\mathcal{V}$  και άρα

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n - 1$$

Θεωρούμε το διάνυσμα  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ . Επειδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ -\frac{\alpha_n}{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

έπεται ότι το σύνολο  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}\}$  είναι μια βάση του  $\mathbb{R}^n$  η οποία περιέχει ως υποσύνολο τη βάση  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}\}$  του  $\mathcal{V}$ .

**Άσκηση 2.** Έστω  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  δύο υπόχωροι του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathbb{K}_6[x]$  και υποθέτουμε ότι

$$\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 4 \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$$

Να προσδιορισθούν οι δυνατές τιμές για τη διάσταση:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

Αν  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ , ποιά είναι η διάσταση  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ ;

**Λύση.** Υπενθυμίζουμε ότι

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \quad (\dagger)$$

Χρησιμοποιώντας ότι  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_6[x] = 7$ , διότι  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  είναι υπόχωρος του  $\mathbb{K}_6[x]$ , θα έχουμε:

$$4 + 5 - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq 7 \implies 2 \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

Επειδή ο  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  είναι υπόχωρος του  $\mathcal{U}$ , έπεται ότι θα έχουμε  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 4$  και επομένως:

$$2 \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq 4$$

- (1) Αν  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$ , τότε από τη σχέση  $(\dagger)$  έπεται ότι  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 7$ . Επειδή ο  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  είναι υπόχωρος του  $\mathbb{K}_6[x]$  και  $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_6[x] = 7$ , θα έχουμε ότι  $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{K}_6[x]$ . Αντίστροφα, αν  $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{K}_6[x]$ , τότε από τη σχέση  $(\dagger)$  έπεται ότι  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$ . Άρα:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2 \iff \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{K}_6[x]$$

- (2) Αν  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 4$ , τότε από τη σχέση  $(\dagger)$  έπεται ότι  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 5$ . Επειδή  $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$  και ο  $\mathcal{V}$  είναι υπόχωρος του  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ , έπεται ότι  $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ . Αυτό όμως προφανώς σημαίνει ότι  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ . Αντίστροφα αν  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ , τότε προφανώς  $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$  και τότε  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} = 5$ . Από τη σχέση  $(\dagger)$  προκύπτει τότε ότι  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 4$ . Άρα:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 4 \iff \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \iff \mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$$

- (3) Έστω  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 3$ . Τότε  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 6$  και προφανώς  $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{V}$  (διότι διαφορετικά αν  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$  θα είχαμε ότι  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U}$  και άρα  $3 = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} = 4$  που είναι άτοπο) και  $\mathcal{U} + \mathcal{V} \neq \mathbb{K}_6[x]$ . Αντίστροφα αν  $\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{V}$  και  $\mathcal{U} + \mathcal{V} \neq \mathbb{K}_6[x]$ , τότε  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \neq 7$  και  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \neq 5$  διότι διαφορετικά θα είχαμε  $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$  το οποίο σημαίνει ότι  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$  το οποίο είναι άτοπο. Άρα:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 3 \iff \mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{V} \text{ και } \mathcal{U} + \mathcal{V} \neq \mathbb{K}_6[x]$$

Αν  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ , από το (2) προκύπτει ότι  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 4$ .

**Άσκηση 3.** Έστω ότι  $\mathcal{V}$  και  $\mathcal{U}$  είναι υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ . Υποθέτουμε ότι:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{U}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) + 1$$

Να δειχθεί ότι ένας εκ των υποχώρων  $\mathcal{V}$  και  $\mathcal{U}$  συμπίπτει με τον  $\mathcal{V} + \mathcal{W}$  και ο άλλος με τον  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ .

**Λύση.** Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι οι υπόχωροι  $\mathcal{V} + \mathcal{U}$  και  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$  έχουν πεπερασμένη διάσταση και ισχύει

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{U}) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U}$$

Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση με την υπόθεση έπεται ότι:

$$2 \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) + 1 = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} \quad (\dagger)$$

Επειδή ο  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$  είναι υπόχωρος του  $\mathcal{V}$  και του  $\mathcal{U}$  θα έχουμε  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V})$  και  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U})$ . Επομένως από τη σχέση  $(\dagger)$  θα έχουμε ότι:

$$\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + 1 \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + 1$$

και επομένως:

$$\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} - 1 \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + 1$$

Επειδή η διάσταση υπόχωρων είναι 0 ή ένας θετικός ακέραιος, από τη σχέση (††) έπεται ότι θα ισχύει μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- (1) 
$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + 1$$
- (2) 
$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U}$$
- (3) 
$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + 1$$

Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις, θα έχουμε:

- (1) Έστω ότι  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + 1$ . Τότε από τη σχέση (†) προκύπτει ότι

$$2 \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) + 1 = 2 \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + 1 \implies \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U}$$

Επειδή  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$  και  $\dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U}$ , θα έχουμε  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \mathcal{U}$  και αυτό σημαίνει ότι  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ . Προφανώς τότε  $\mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{V}$ . Άρα σ' αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \mathcal{U} \quad \text{και} \quad \mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{V}$$

- (2) Έστω ότι  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U}$ . Τότε από τη σχέση (†) προκύπτει ότι:

$$2 \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) + 1 = 2 \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$$

και αυτό είναι άτοπο διότι το πρώτο μέλος της παραπάνω ισότητας είναι περιττός και το δεύτερο μέλος της είναι άρτιος. Άρα η περίπτωση  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U}$  δεν εμφανίζεται.

- (3) Έστω ότι  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + 1$ . Τότε από τη σχέση (†) προκύπτει ότι

$$2 \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) + 1 = 2 \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + 1 \implies \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$$

Επειδή  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$  και  $\dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$ , θα έχουμε  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \mathcal{V}$  και αυτό σημαίνει ότι  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ . Προφανώς τότε  $\mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$ . Άρα σ' αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \mathcal{V} \quad \text{και} \quad \mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

**Άσκηση 4.** Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{x}_1 = (1, 2, 1), \quad \vec{x}_2 = (1, 1, -1), \quad \vec{x}_3 = (1, 3, 3)$$

$$\vec{y}_1 = (2, 3, -1), \quad \vec{y}_2 = (1, 2, 2), \quad \vec{y}_3 = (1, 1, -3)$$

Αν

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle \quad \text{και} \quad \mathcal{U} = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \rangle$$

να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V} + \mathcal{U}$  και  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ .

**Λύση.** (1) Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ , και βρίσκουμε την ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτή μορφή του:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2, \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 2\Gamma_2]{\Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Γνωρίζουμε τότε ότι, θέτοντας  $\vec{x}'_1 = (1, 0, -3)$  και  $\vec{x}'_2 = (0, 1, 2)$ , θα έχουμε:

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}'_1, \vec{x}'_2 \rangle$$

Αν  $\lambda_1 \vec{x}'_1 + \lambda_2 \vec{x}'_2 = \vec{0}$ , τότε

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{x}'_1 + \lambda_2 \vec{x}'_2 = \vec{0} &\implies \lambda_1(1, 0, -3) + \lambda_2(0, 1, 2) = (0, 0, 0) \implies \\ &\implies (\lambda_1, \lambda_2, -3\lambda_1 + 2\lambda_2) = (0, 0, 0) \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα το σύνολο  $\mathcal{B} = \{\vec{x}'_1, \vec{x}'_2\}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{V}$  και επομένως

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 2$$

(2) Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων  $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ , και βρίσκουμε την ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτή μορφή του:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

Γνωρίζουμε τότε ότι, θέτοντας  $\vec{y}'_1 = (1, 0, -8)$  και  $\vec{y}'_2 = (0, 1, 5)$ , θα έχουμε:

$$\mathcal{U} = \langle \vec{y}'_1, \vec{y}'_2 \rangle$$

Αν  $\lambda_1 \vec{y}'_1 + \lambda_2 \vec{y}'_2 = \vec{0}$ , τότε

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{y}'_1 + \lambda_2 \vec{y}'_2 = \vec{0} &\implies \lambda_1(1, 0, -8) + \lambda_2(0, 1, 5) = (0, 0, 0) \implies \\ &\implies (\lambda_1, \lambda_2, -8\lambda_1 + 5\lambda_2) = (0, 0, 0) \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα το σύνολο  $\mathcal{C} = \{\vec{y}'_1, \vec{y}'_2\}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{U}$  και επομένως

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = 2$$

(3) Επειδή το σύνολο  $\mathcal{B}$ , ως βάση του  $\mathcal{V}$  είναι σύνολο γεννητόρων του  $\mathcal{V}$  και το σύνολο  $\mathcal{C}$ , ως βάση του  $\mathcal{U}$  είναι σύνολο γεννητόρων του  $\mathcal{U}$ , έπεται ότι το σύνολο  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  είναι σύνολο γεννητόρων του  $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ :

$$\mathcal{V} + \mathcal{U} = \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$$

Για να προσδιορίσουμε ένα οικονομικότερο σύνολο γεννητόρων του  $\mathcal{V} + \mathcal{U}$  εργαζόμαστε ως εξής:

Θεωρούμε τον πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων του συνόλου  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{\vec{x}'_1, \vec{x}'_2, \vec{y}'_1, \vec{y}'_2\}$ , και βρίσκουμε την ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτή μορφή του:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \frac{1}{3}\Gamma_4]{\Gamma_3 \rightarrow -\frac{1}{5}\Gamma_3} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 3\Gamma_3, \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A) \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε τότε ότι θέτοντας  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ , αποκτούμε ένα σύνολο γεννητόρων  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  του  $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ , το οποίο είναι προφανώς μια βάση του  $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ . Επειδή προφανώς  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ , έπεται ότι:

$$\mathcal{V} + \mathcal{W} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \mathbb{R}^3 \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{U}) = 3$$

(4) *Επειδή*

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{U}) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{U}$$

*έπεται ότι*

$$3 + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = 2 + 2 \implies \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = 1$$

*Θα προσδιορίσουμε μια βάση του  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ . Έστω  $(x, y, z) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ . Τότε*

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U} &\implies \begin{cases} (x, y, z) \in \mathcal{V} \\ (x, y, z) \in \mathcal{U} \end{cases} \implies \begin{cases} (x, y, z) \in \langle \vec{x}'_1, \vec{x}'_2 \rangle \\ (x, y, z) \in \langle \vec{y}'_1, \vec{y}'_2 \rangle \end{cases} \implies \\ \implies \begin{cases} (x, y, z) \in \langle (1, 0, -3), (0, 1, 2) \rangle \\ (x, y, z) \in \langle (1, 0, -8), (0, 1, 5) \rangle \end{cases} &\implies \begin{cases} \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : (x, y, z) = \lambda_1(1, 0, -3) + \lambda_2(0, 1, 2) \\ \exists \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} : (x, y, z) = \kappa_1(1, 0, -8) + \kappa_2(0, 1, 5) \end{cases} \\ \implies \begin{cases} (x, y, z) = (\lambda_1, \lambda_2, -3\lambda_1 + 2\lambda_2) \\ (x, y, z) = (\kappa_1, \kappa_2, -8\kappa_1 + 5\kappa_2) \end{cases} &\implies \begin{cases} x = \lambda_1 = \kappa_1 \text{ \& } y = \lambda_2 = \kappa_2 \\ z = -3\lambda_1 + 2\lambda_2 = -8\kappa_1 + 5\kappa_2 \end{cases} \implies \end{aligned}$$

$$\implies z = -3x + 2y = -8x + 5y \implies 5x - 3y = 0 \implies y = \frac{5}{3}x \text{ και τότε } z = -3x + 2y = -3x + 2\frac{5}{3}x = \frac{1}{3}x$$

*Άρα θα έχουμε:*

$$y = \frac{5}{3}x \text{ και } z = \frac{1}{3}x, \text{ δηλαδή: } (x, y, z) = \left(x, \frac{5}{3}x, \frac{1}{3}x\right) = x \left(1, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

*Επομένως καταλήγουμε ότι*

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \left\{ x \left(1, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \{ \kappa(3, 5, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid \kappa \in \mathbb{R} \} = \langle (3, 5, 1) \rangle$$

*Το διάνυσμα  $(3, 5, 1)$  είναι, ως μη-μηδενικό, γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί βάση του υπόχωρου  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ .***Άσκηση 5.** *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του  $\mathbb{R}^4$ :*

$$\vec{x}_1 = (1, 1, 0, 0), \quad \vec{x}_2 = (0, 1, 1, 0), \quad \vec{x}_3 = (0, 0, 1, 1)$$

$$\vec{y}_1 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{y}_2 = (0, 2, 1, 1), \quad \vec{y}_3 = (1, 2, 1, 2)$$

*Αν*

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle \text{ και } \mathcal{U} = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3 \rangle$$

*να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V} + \mathcal{U}$  και  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ .***Λύση.** (1) *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ , και βρίσκουμε την ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτή μορφή του:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$

*Γνωρίζουμε τότε ότι, θέτοντας  $\vec{x}'_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $\vec{x}'_2 = (0, 1, 0, -1)$ ,  $\vec{x}'_3 = (0, 0, 1, 1)$  και θα έχουμε:*

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}'_1, \vec{x}'_2, \vec{x}'_3 \rangle$$

*Αν  $\lambda_1 \vec{x}'_1 + \lambda_2 \vec{x}'_2 = \vec{0} + \lambda_3 \vec{x}'_3 = \vec{0}$ , τότε*

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{x}'_1 + \lambda_2 \vec{x}'_2 &= \vec{0} + \lambda_3 \vec{x}'_3 \implies \lambda_1(1, 0, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 0, -1) + \lambda_3(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0) \implies \\ \implies (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) &= (0, 0, 0, 0) \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Άρα το σύνολο  $\mathcal{B} = \{\vec{x}'_1, \vec{x}'_2, \vec{x}'_3\}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{V}$  και επομένως

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 3$$

(2) Θεωρούμε τον πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων  $\vec{y}'_1, \vec{y}'_2, \vec{y}'_3$ , και βρίσκουμε την ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτή μορφή του:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \Gamma(B)$$

Γνωρίζουμε τότε ότι, θέτοντας  $\vec{y}'_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $\vec{y}'_2 = (0, 1, 0, 1)$ , και  $\vec{y}'_3 = (0, 0, 1, -1)$  θα έχουμε:

$$\mathcal{U} = \langle \vec{y}'_1, \vec{y}'_2, \vec{y}'_3 \rangle$$

Αν  $\lambda_1 \vec{y}'_1 + \lambda_2 \vec{y}'_2 + \lambda_3 \vec{y}'_3 = \vec{0}$ , τότε

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{y}'_1 + \lambda_2 \vec{y}'_2 + \lambda_3 \vec{y}'_3 = \vec{0} &\implies \lambda_1(1, 0, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 0, 1) + \lambda_3(0, 0, 1, -1) = (0, 0, 0, 0) \implies \\ &\implies (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = (0, 0, 0) \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Άρα το σύνολο  $\mathcal{C} = \{\vec{y}'_1, \vec{y}'_2, \vec{y}'_3\}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{U}$  και επομένως

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = 3$$

(3) Επειδή το σύνολο  $\mathcal{B}$ , ως βάση του  $\mathcal{V}$  είναι σύνολο γεννητόρων του  $\mathcal{V}$  και το σύνολο  $\mathcal{C}$ , ως βάση του  $\mathcal{U}$  είναι σύνολο γεννητόρων του  $\mathcal{U}$ , έπεται ότι το σύνολο  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  είναι σύνολο γεννητόρων του  $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ :

$$\mathcal{V} + \mathcal{U} = \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$$

Για να προσδιορίσουμε ένα οικονομικότερο σύνολο γεννητόρων του  $\mathcal{V} + \mathcal{U}$  εργαζόμαστε ως εξής:

Θεωρούμε τον πίνακα

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

του οποίου οι γραμμές αποτελούνται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων του συνόλου  $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{\vec{x}'_1, \vec{x}'_2, \vec{x}'_3, \vec{y}'_1, \vec{y}'_2, \vec{y}'_3\}$ , και βρίσκουμε την ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτή μορφή του:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_5 \rightarrow \Gamma_5 - \Gamma_2, \Gamma_6 \rightarrow \Gamma_6 - \Gamma_3]{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\Gamma_5 \rightarrow \Gamma_5 + \Gamma_4]{\Gamma_4 \rightarrow -\frac{1}{2}\Gamma_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_4, \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_4]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A) \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε τότε ότι θέτοντας  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$ , και  $\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ , αποκτούμε ένα σύνολο γεννητόρων  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$  του  $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ , το οποίο είναι προφανώς μια βάση του  $\mathcal{V} + \mathcal{U}$ . Επειδή όμως έχουμε και  $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle = \mathbb{R}^4$ , έπεται ότι:

$$\mathcal{V} + \mathcal{W} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle = \mathbb{R}^4 \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{U}) = 4$$

(4) Επειδή

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} + \mathcal{U}) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{U}$$

έπεται ότι

$$4 + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = 3 + 3 \implies \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{U}) = 2$$

Θα προσδιορίσουμε μια βάση του  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ . Έστω  $(x, y, z, w) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ . Τότε

$$(x, y, z, w) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U} \implies \begin{cases} (x, y, z, w) \in \mathcal{V} \\ (x, y, z, w) \in \mathcal{U} \end{cases} \implies \begin{cases} (x, y, z, w) \in \langle \vec{x}'_1, \vec{x}'_2, \vec{x}'_3 \rangle \\ (x, y, z, w) \in \langle \vec{y}'_1, \vec{y}'_2, \vec{y}'_3 \rangle \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} (x, y, z, w) \in \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1) \rangle \\ (x, y, z, w) \in \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1) \rangle \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : (x, y, z, w) = \lambda_1(1, 0, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 0, 1) + \lambda_3(0, 0, 1, 1) \\ \exists \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R} : (x, y, z, w) = \kappa_1(1, 0, 0, 1) + \kappa_2(0, 1, 0, 1) + \kappa_3(0, 0, 1, -1) \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} (x, y, z, w) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) \\ (x, y, z, w) = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3) \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda_1 = \kappa_1 \quad \& \quad y = \lambda_2 = \kappa_2 \quad \& \quad z = \lambda_3 = \kappa_3 \\ w = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = \kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 \end{cases} \implies$$

$$\implies w = x - y + z = x + y - z \implies y = z \quad \text{και τότε} \quad w = x$$

Άρα θα έχουμε:

$$(x, y, z, w) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U} \iff w = x \quad \& \quad y = z$$

Επομένως καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \cap \mathcal{U} &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = w \quad \& \quad y = z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x, 0, 0, x) + (0, y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle$$

και επειδή τα διανύσματα  $(1, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 0)$   $(3, 5, 1)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι το σύνολο  $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$  αποτελεί βάση του υπόχωρου  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ .

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $n \times n$  πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

καλείται **μαγικός** αν και μόνον αν το άθροισμα:

- (1)  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ , το άθροισμα των στοιχείων της  $i$ -γραμμής:  $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}$
- (2)  $\forall j = 1, 2, \dots, n$ , το άθροισμα των στοιχείων της  $j$ -στήλης:  $a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}$
- (3) των στοιχείων της κύριας διαγωνίου:  $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
- (4) των στοιχείων της δευτερεύουσας διαγωνίου:  $a_{1n} + a_{2n-1} + \cdots + a_{n1}$

είναι ίσο με τον ίδιο αριθμό  $S \in \mathbb{K}$ , ο οποίος καλείται ο **μαγικός αριθμός** του  $A$ .

Για παράδειγμα οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι μαγικοί με μαγικούς αριθμούς 2, 15 και 34 αντίστοιχα.

Συμβολίζουμε με  $M\mathbb{P}(n)$  το σύνολο όλων των  $n \times n$  μαγικών πινάκων.

**Άσκηση 6.** Να δείχθει ότι το σύνολο  $M\mathbb{P}(n)$  είναι ένας υπόχωρος του  $M_n(\mathbb{K})$ . Να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων  $M\mathbb{P}(2)$  και  $M\mathbb{P}(3)$ .

**Λύση.** Προφανώς ο μηδενικός πίνακας είναι μαγικός με μαγικό αριθμό ίσο με 0. Αν  $A$  και  $B$  είναι μαγικοί πίνακες με μαγικούς αριθμούς  $S$  και  $T$ , τότε προφανώς ο πίνακας  $A+B$  είναι μαγικός με μαγικό αριθμό  $S+T$ . Τέλος αν ο πίνακας  $A$  είναι μαγικός με μαγικό αριθμό  $S$  και  $\lambda \in \mathbb{K}$ , τότε προφανώς ο πίνακας  $\lambda A$  είναι μαγικός με μαγικό αριθμό  $\lambda S$ . Άρα το υποσύνολο  $M\mathbb{P}(n)$  είναι ένας υπόχωρος του  $M_n(\mathbb{K})$ .

(1) Έστω  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ένας μαγικός  $2 \times 2$  πίνακας με μαγικό αριθμό  $S$ . Τότε:

$$a + b = c + d = a + c = b + d = a + d = b + c = S$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται άμεσα ότι  $a = b = c = d$  και άρα  $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Προφανώς τότε  $S = 2a$ . Τα παραπάνω δείχνουν ότι:

$$M\mathbb{P}(2) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid a \in \mathbb{K} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επομένως το μονοσύνολο  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  είναι μια βάση του  $M\mathbb{P}(2)$  και άρα  $\dim_{\mathbb{K}} M\mathbb{P}(2) = 1$ .

(2) Έστω  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  ένας μαγικός  $3 \times 3$  πίνακας με μαγικό αριθμό  $S$ . Τότε:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} &= a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = \\ &= a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33} = \\ &= a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{13} + a_{22} + a_{31} = S \end{aligned}$$

Θέτοντας:

$$x = a_{11} \quad \text{και} \quad y = a_{13} \quad \text{και} \quad z = a_{21}$$

θα έχουμε:

$$\begin{aligned} a_{31} &= S - x - z \quad \text{και} \quad a_{12} = S - x - y \implies a_{22} = S - y - (S - x - z) = x - y + z \\ a_{32} &= S - (S - x - y) - (x - y + z) = 2y - z \quad \text{και} \quad a_{23} = S - x + y - 2z \quad \text{και} \quad a_{33} = x - 2y + 2z \\ a_{23} &= S - x + y - 2z \end{aligned}$$

Επειδή  $S = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ , από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι:

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33} = x + x - y + z + x - 2y + 2z = 3x - 3y + 3z \implies S = 3(x - y + z)$$

και τότε βλέπουμε ότι:

$$A = \begin{pmatrix} x & 2x - 4y + 3z & y \\ z & x - y + z & 2x - 2y + z \\ 2x - 3y + 2z & 2y - z & x - 2y + 2z \end{pmatrix} =$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} x & 2x & 0 \\ 0 & x & 2x \\ 2x & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4y & y \\ 0 & -y & -2y \\ -3y & 2y & -2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3z & 0 \\ z & z & z \\ 2z & -z & 2z \end{pmatrix} = \\
&= x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\text{ΜΠ}(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Οι μαγικοί πίνακες

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

με μαγικούς αριθμούς 3, -3 και 3 είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, διότι:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 K + \lambda_2 L + \lambda_3 M = 0 &\implies \begin{pmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 - 4\lambda_2 + 3\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 & 2\lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \\
&\implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}$$

Επομένως το σύνολο  $\{K, L, M\}$  είναι μια βάση του  $\text{ΜΠ}(3)$  και άρα:

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{ΜΠ}(3) = 3$$

**Άσκηση 7.** Έστω  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  και

$$(\Sigma) \quad AX = 0$$

το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα  $m$  εξισώσεων με  $n$  αγνώστους. Αν  $m < n$  ναδειχθεί ότι το  $(\Sigma)$  έχει τουλάχιστον μια μη μηδενική λύση, και επομένως έχει άπειρες λύσεις.

**Λύση.** Θεωρούμε τις στήλες

$$\Sigma_1(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2(A) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \quad \Sigma_n(A) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

του πίνακα  $A$  ως διανύσματα του χώρου  $\mathbb{K}_m$  των στηλών με  $m$  στοιχεία. Επειδή  $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_m = m$ , τα  $n > m$  το πλήθος διανύσματα  $\Sigma_1(A), \dots, \Sigma_n(A)$  είναι γραμμικά εξαρτημένα. Επομένως υπάρχουν στοιχεία  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ , όπου  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ , έτσι ώστε:

$$x_1 \Sigma_1(A) + x_2 \Sigma_2(A) + \dots + x_n \Sigma_n(A) = 0$$

όπου  $0 \in \mathbb{K}_m$  είναι η μηδενική στήλη. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Η παραπάνω σχέση είναι προφανώς ισοδύναμη με την

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή  $AX = 0$  και η μη-μηδενική στήλη  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  αποτελεί μια μη-μηδενική λύση του  $(\Sigma)$ .

Γνωρίζουμε ότι το σύνολο λύσεων

$$\Lambda(\Sigma) = \{X \in \mathbb{K}_n \mid AX = 0\}$$

του  $(\Sigma)$  είναι ένας υπόχωρος του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathbb{K}_n$ . Επειδή το  $(\Sigma)$  έχει μια μη-μηδενική λύση, έπεται ότι ο υπόχωρος  $\Lambda(\Sigma)$  δεν είναι ο μηδενικός υπόχωρος, και άρα  $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda(\Sigma) \geq 1$ . Τότε το πλήθος των στοιχείων του  $\Lambda(\Sigma)$  είναι άπειρο: για παράδειγμα αν  $0 \neq X \in \Lambda(\Sigma)$ , τότε  $\lambda X \in \Lambda(\Sigma)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ . Επειδή το πλήθος των στοιχείων του  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  είναι άπειρο, έπεται ότι το πλήθος των στοιχείων του  $\Lambda(\Sigma)$  είναι άπειρο.

**Άσκηση 8.** Έστω  $A \in M_n(\mathbb{K})$  ένας  $n \times n$  πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$ . Να δειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο  $k$  με  $k \geq n^2$ , υπάρχουν στοιχεία  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ , όχι όλα ίσα με μηδέν, έτσι ώστε:

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \dots + \lambda_k A^k = 0$$

**Λύση.** Γνωρίζουμε<sup>1</sup> ότι ο  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος  $M_n(\mathbb{K})$  έχει διάσταση  $\dim_{\mathbb{K}} M_n(\mathbb{K}) = n^2$ . Επομένως κάθε σύνολο διανυσμάτων του με περισσότερα από  $n^2$  στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένο. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{I_n, A, A^2, \dots, A^k\}$$

- (1) Υποθέτουμε ότι το σύνολο  $\mathcal{A}$  έχει λιγότερα από  $k + 1$  στοιχεία. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι όλα τα στοιχεία του συνόλου  $\mathcal{A}$  διαφορετικά. Επομένως υπάρχουν ακέραιοι  $\mu, \nu$ , όπου  $0 \leq \nu < \mu \leq k$  έτσι ώστε  $A^\nu = A^\mu$ . Τότε όμως το σύνολο  $\mathcal{A}$  είναι γραμμικά εξαρτημένο διότι θα έχουμε μια σχέση γραμμικής εξάρτησης των στοιχείων του της μορφής  $0I_n + 0A + 0A^2 + \dots + A^\nu + \dots - A^\mu + \dots + 0A^k = 0$ .
- (2) Αν το σύνολο  $\mathcal{A}$  έχει ακριβώς  $k + 1$  στοιχεία, δηλαδή όλα τα στοιχεία του είναι ανά δύο διαφορετικά, τότε επειδή το πλήθος τους είναι  $k + 1 > n^2$ , έπεται ότι το σύνολο  $\mathcal{A}$  είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Άρα σε κάθε περίπτωση το σύνολο  $\mathcal{A}$  είναι γραμμικά εξαρτημένο, και αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν στοιχεία  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ , όχι όλα ίσα με μηδέν, έτσι ώστε:

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \dots + \lambda_k A^k = 0$$

**Άσκηση 9.** Θεωρούμε τον  $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}_n[x]$  των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ  $n$  υπεράνω του  $\mathbb{R}$ , και έστω  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν  $1 \leq k \leq n$ , θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{V}_k = \{P(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid P(\rho_1) = P(\rho_2) = \dots = P(\rho_k) = 0\}$$

- (1) Να δειχθεί ότι το υποσύνολο  $\mathcal{V}_k$  είναι υπόχωρος του  $\mathbb{R}_n[x]$ .
- (2) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του  $\mathcal{V}_k$ .
- (3) Να συμπληρωθεί η βάση του  $\mathcal{V}_k$  που βρέθηκε στο (2) σε μια βάση του  $\mathbb{R}_n[x]$ .

**Λύση.** Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$\Pi(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_k) \in \mathbb{R}_n[x]$$

και έστω το ακόλουθο σύνολο πολυωνύμων

$$\mathcal{B}_k = \{\Pi(x), x\Pi(x), x^2\Pi(x), \dots, x^{n-k}\Pi(x)\}$$

<sup>1</sup>Το σύνολο πινάκων  $\{E_{ij} \in M_n(\mathbb{K}) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ , όπου ο πίνακας  $E_{ij}$  έχει τη μονάδα στην  $(i, j)$ -θέση και παντού αλλού μηδέν, είναι μια βάση του  $M_n(\mathbb{K})$ .

Προφανώς  $\deg \Pi(x) = k$ , και επομένως:

$$\deg x^m \Pi(x) = k + m, \quad 0 \leq m \leq n - k + 1$$

Επειδή τα πολυώνυμα του συνόλου  $\mathcal{B}_k$  έχουν ανά δύο διαφορετικό βαθμό, έπεται ότι το σύνολο  $\mathcal{B}_k$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αναλυτικά: έστω  $a_0, a_1, \dots, a_{n-k} \in \mathbb{K}$ , έτσι ώστε:

$$a_0 \Pi(x) + a_1 x \Pi(x) + a_2 x^2 \Pi(x) + \dots + a_{n-k} x^{n-k} \Pi(x) = 0$$

Επειδή  $\deg \Pi(x) = k$ ,  $\deg x \Pi(x) = k + 1$ ,  $\deg x^2 \Pi(x) = k + 2$ ,  $\dots$ ,  $\deg x^{n-k} \Pi(x) = n$ , ο συντελεστής  $a_{n-k}$  του  $x^n$  στο πολυώνυμο του πρώτου μέλους είναι ίσος με μηδέν, και άρα η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$a_0 \Pi(x) + a_1 x \Pi(x) + a_2 x^2 \Pi(x) + \dots + a_{n-k-1} x^{n-k-1} \Pi(x) = 0$$

ο συντελεστής  $a_{n-k-1}$  του  $x^{n-1}$  στο πολυώνυμο του πρώτου μέλους είναι ίσος με μηδέν, και άρα η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$a_0 \Pi(x) + a_1 x \Pi(x) + a_2 x^2 \Pi(x) + \dots + a_{n-k-2} x^{n-k-2} \Pi(x) = 0$$

Συνεχίζοντας και' αυτόν τον τρόπο, θα καταλήξουμε ότι  $a_2 = a_3 = \dots = a_{n-k} = 0$  και θα έχουμε τη σχέση

$$a_0 \Pi(x) + a_1 x \Pi(x) = 0$$

Τότε ο συντελεστής  $a_1$  του  $x^{k+1}$  στο πολυώνυμο του πρώτου μέλους είναι ίσος με μηδέν, και άρα η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$a_0 \Pi(x) = 0$$

Τότε ο συντελεστής  $a_0$  του  $x^k$  στο πολυώνυμο  $\Pi(x)$  είναι ίσος με μηδέν. Επομένως

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-k} = 0$$

Έτσι το σύνολο  $\mathcal{B}_k$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Έστω  $P(x) \in \mathcal{V}_k$ . Τότε  $P(\rho_1) = P(\rho_2) = \dots = P(\rho_k) = 0$ , και άρα οι ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  είναι ρίζες του  $P(x)$ . Τότε όπως γνωρίζουμε το πολυώνυμο  $\Pi(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_k)$  είναι διαιρέτης του  $P(x)$ , δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο  $A(x) \in \mathbb{R}[x]$  έτσι ώστε:

$$P(x) = A(x) \Pi(x)$$

Επειδή  $P(x) \in \mathcal{V}_k$ , έπεται ότι  $\deg P(x) \leq n + 1$  και επομένως, επειδή  $\deg P(x) = \deg A(x) + \deg \Pi(x)$ , θα έχουμε:

$$0 \leq \deg A(x) \leq n - k$$

Με άλλα λόγια,  $A(x) \in \mathbb{R}_{n-k}[x]$  και επομένως

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-k} x^{n-k}$$

Τότε

$$P(x) = A(x) \Pi(x) = a_0 \Pi(x) + a_1 x \Pi(x) + a_2 x^2 \Pi(x) + \dots + a_{n-k} x^{n-k} \Pi(x) \quad (*)$$

το πολυώνυμο στο δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας ανήκει στον υπόχωρο

$$\langle \Pi(x), x \Pi(x), x^2 \Pi(x), \dots, x^{n-k} \Pi(x) \rangle$$

ο οποίος παράγεται από τα πολυώνυμα του συνόλου  $\mathcal{B}_k$ . Άρα  $\mathcal{V}_k \subseteq \langle \Pi(x), x \Pi(x), x^2 \Pi(x), \dots, x^{n-k} \Pi(x) \rangle$ .

Αντίστροφα, αν  $P(x) \in \langle \Pi(x), x \Pi(x), x^2 \Pi(x), \dots, x^{n-k} \Pi(x) \rangle$ , τότε  $P(x) \in \mathbb{R}_n[x]$  και το  $P(x)$  είναι της μορφής (\*). Επειδή προφανώς τότε  $\Pi(\rho_i) = 0$ ,  $1 \leq i \leq k$ , έπεται ότι  $P(x) \in \mathcal{V}_k$ . Άρα

$$\mathcal{V}_k = \langle \Pi(x), x \Pi(x), x^2 \Pi(x), \dots, x^{n-k} \Pi(x) \rangle$$

Επειδή το σύνολο  $\mathcal{B}_k$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι το σύνολο  $\mathcal{B}_k$  είναι μια βάση του  $\mathcal{V}_k$  και άρα:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_k = n - k + 1$$

Θεωρούμε το σύνολο  $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, \dots, x^{k-1}\}$ . Τότε το σύνολο

$$\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_k = \{1, x, x^2, \dots, x^{k-1}, \Pi(x), x \Pi(x), x^2 \Pi(x), \dots, x^{n-k} \Pi(x)\}$$

είναι ένα σύνολο  $n + 1$  το πλήθος πολυωνύμων  $P_i(x)$  με  $\deg P_i(x) = i$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο  $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_k$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα είναι μια βάση του  $\mathbb{R}_n[x]$  η οποία συμπληρώνει τη βάση  $\mathcal{B}_k$  του  $\mathcal{V}_k$ .

Υπενθυμίζουμε ότι αν

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$$

είναι δύο βάσεις του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ , τότε γράφοντας τα διανύσματα της βάσης  $\mathcal{C}$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης  $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n \\ \vec{e}'_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n \\ &\vdots \\ \vec{e}'_n &= a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n\end{aligned}$$

προκύπτει ο  $n \times n$  πίνακας

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ο οποίος καλείται ο **πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathcal{B}$  στη βάση  $\mathcal{C}$** . Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο πίνακας  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  είναι αντιστρέψιμος και

$$(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

όπου ο  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathcal{C}$  στη βάση  $\mathcal{B}$ .

Έστω  $\vec{x} \in \mathcal{E}$  ένα τυχόν διάνυσμα του  $\mathcal{E}$  και έστω

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n \\ \vec{x} &= x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + \dots + x'_n\vec{e}'_n\end{aligned}$$

η μοναδική γραφή του  $\vec{x}$  ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων των βάσεων  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{C}$ . Οι πίνακες-στήλες

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

καλούνται οι *πίνακες των συνιστωσών* του  $\vec{x}$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{C}$  αντίστοιχα. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$X = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot X' \quad \text{και} \quad X' = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot X$$

**Άσκηση 10.** Θεωρούμε τις ακόλουθες βάσεις του  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\} \\ \mathcal{C} &= \{\vec{e}'_1 = (1, 1, 1), \vec{e}'_2 = (1, 1, 0), \vec{e}'_3 = (1, 0, 0)\}\end{aligned}$$

(1) Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  και  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ .

(2) Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος  $\vec{x} = (4, -2, 3)$  ως προς τη βάση  $\mathcal{C}$ .

**Λύση.** (1) • Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα μετάβασης  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  εκφράζουμε τα διανύσματα της βάσης  $\mathcal{C}$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης  $\mathcal{B}$ . Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= (1, 1, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= (1, 1, 0) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= (1, 0, 0) = (1, 0, 0) = \vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3\end{aligned}$$

Άρα:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα μετάβασης  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  εκφράζουμε τα διανύσματα της βάσης  $\mathcal{B}$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης  $\mathcal{C}$ . Θα έχουμε:

(α) Έστω

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 &\implies (1, 0, 0) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) \implies (1, 0, 0) = (a + b + c, a + b, a) \\ &\implies \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a + b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c = 1 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_1 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

(β) Έστω

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 &\implies (0, 1, 0) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) \implies (0, 1, 0) = (a + b + c, a + b, a) \\ &\implies \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b = 1 \\ a = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c = -1 \\ b = 1 \\ a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

(γ) Έστω

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 &\implies (0, 0, 1) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) \implies (0, 0, 1) = (a + b + c, a + b, a) \\ &\implies \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} c = 0 \\ b = -1 \\ a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Προφανώς:

$$\vec{x} = (4, -2, 3) = 4(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

Επομένως:

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Τότε:

$$X' = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

δηλαδή:  $\vec{x} = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$ .

**Άσκηση 11.** Θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων του  $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 1, 1), \vec{e}_2 = (1, 1, 0), \vec{e}_3 = (1, 0, 0)\}$$

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, -1), \vec{e}_2 = (-1, 1, 0), \vec{e}_3 = (1, -1, 1)\}$$

(1) Ναδειχθεί ότι τα υποσύνολα  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{C}$  είναι βάσεις του  $\mathbb{R}^3$ .

(2) Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  και  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ .

(3) Να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος  $\vec{x} = (1, -2, 5)$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{C}$ .

**Λύση.** (1) Επειδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

έπεται ότι το σύνολο  $\mathcal{B}$  είναι βάση του  $\mathbb{R}^3$ , και επειδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ότι το σύνολο  $\mathcal{C}$  είναι βάση του  $\mathbb{R}^3$ .

(2) • Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα μετάβασης  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  εκφράζουμε τα διανύσματα της βάσης  $\mathcal{C}$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης  $\mathcal{B}$ . Θα έχουμε:

(α) Έστω

$$\vec{e}_1 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \implies (1, 0, -1) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) \implies (1, 0, -1) = (a+b+c, a+b, a)$$

$$\implies \begin{cases} a+b+c=1 \\ a+b=0 \\ a=-1 \end{cases} \implies \begin{cases} c=1 \\ b=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_1 = -1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

(β) Έστω

$$\vec{e}_2 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \implies (-1, 1, 0) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) \implies (-1, 1, 0) = (a+b+c, a+b, a)$$

$$\implies \begin{cases} a+b+c=-1 \\ a+b=1 \\ a=0 \end{cases} \implies \begin{cases} c=-2 \\ b=1 \\ a=0 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$$

(γ) Έστω

$$\vec{e}_3 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \implies (1, -1, 1) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) \implies (1, -1, 1) = (a+b+c, a+b, a)$$

$$\implies \begin{cases} a+b+c=1 \\ a+b=-1 \\ a=1 \end{cases} \implies \begin{cases} c=2 \\ b=-2 \\ a=1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Άρα:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

• Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα μετάβασης  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  εκφράζουμε τα διανύσματα της βάσης  $\mathcal{B}$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης  $\mathcal{C}$ . Θα έχουμε:

(α) Έστω

$$\vec{e}_1 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \implies (1, 1, 1) = a(1, 0, -1) + b(-1, 1, 0) + c(1, -1, 1) \implies (1, 1, 1) = (a-b+c, b-c, -a+c)$$

$$\implies \begin{cases} a-b+c=1 \\ b-c=1 \\ -a+c=1 \end{cases} \implies \begin{cases} c=3 \\ b=4 \\ a=2 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_1 = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

(β) Έστω

$$\vec{e}_2 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \implies (1, 1, 0) = a(1, 0, -1) + b(-1, 1, 0) + c(1, -1, 1) \implies (1, 1, 0) = (a-b+c, b-c, -a+c)$$

$$\implies \begin{cases} a-b+c=1 \\ b-c=1 \\ -a+c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} c=2 \\ b=3 \\ a=2 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

(γ) Έστω

$$\vec{e}_3 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \implies (1, 0, 0) = a(1, 0, -1) + b(-1, 1, 0) + c(1, -1, 1) \implies (1, 0, 0) = (a-b+c, b-c, -a+c)$$

$$\implies \begin{cases} a-b+c=1 \\ b-c=0 \\ -a+c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} c=1 \\ b=1 \\ a=1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Άρα:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Θεωρούμε το διάνυσμα  $\vec{x} = (1, -2, 5)$ .

(α) Θα έχουμε:

$$\vec{x} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \implies (1, -2, 5) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) \implies (1, -2, 5) = (a+b+c, a+b, a)$$

$$\implies \begin{cases} a+b+c=1 \\ a+b=-2 \\ a=5 \end{cases} \implies \begin{cases} c=3 \\ b=-7 \\ a=5 \end{cases}$$

Άρα:

$$\vec{x} = 5\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

και επομένως

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(β) Θα έχουμε:

$$\vec{x} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \implies (1, -2, 5) = a(1, 0, -1) + b(-1, 1, 0) + c(1, -1, 1) \implies (1, -2, 5) = (a-b+c, b-c, -a+c)$$

$$\implies \begin{cases} a-b+c=1 \\ b-c=-2 \\ -a+c=5 \end{cases} \implies \begin{cases} c=4 \\ b=2 \\ a=-1 \end{cases}$$

Άρα:

$$\vec{x} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

και επομένως:

$$X' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Επαληθεύουμε:

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 12.** Θεωρούμε την κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

του  $\mathbb{K}_n[x]$  και το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x^2, \dots, 1+x^n\}$$

- (1) Ναδειχθεί ότι το υποσύνολο  $\mathcal{C}$  είναι βάση του  $\mathbb{K}_n[x]$ .
- (2) Να βρεθούν οι πίνακες μετάβασης  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  και  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ .
- (3) Να βρεθούν οι συνιστώσες του πολυωνύμου  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{C}$ .

**Λύση.** (1) Επειδή  $\deg(1+x^k) = k$ ,  $0 \leq k \leq n$  και  $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[x] = n+1$ , από γνωστό Θεώρημα, έπεται ότι το υποσύνολο  $\mathcal{C}$  είναι μια βάση του  $\mathbb{K}_n[x]$ .

- (2) (α) Επειδή

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n \\ 1+x &= 1 + x + 0x^2 + \dots + 0x^n \\ 1+x^2 &= 1 + 0x + x^2 + \dots + 0x^n \\ &\vdots \\ 1+x^n &= 1 + 0x + 0x^2 + \dots + 1x^n \end{aligned}$$

έπεται ότι:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- (β) Επειδή

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0(1+x) + 0(1+x^2) + \dots + 0(1+x^n) \\ x &= -1 + (1+x) + 0(1+x^2) + \dots + 0x^n \\ x^2 &= -1 + 0(1+x) + (1+x^2) + \dots + 0x^n \\ &\vdots \\ x^n &= -1 + 0x + 0x^2 + \dots + (1+x^n) \end{aligned}$$

έπεται ότι:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- (3) Επειδή προφανώς

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = a_01 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

θα έχουμε:

$$X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$



και επομένως

$$X' = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - a_1 - \cdots - a_n \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 13.** Έστω  $\mathcal{E}$  ένας  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος διάστασης  $n$  και έστω

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

$$\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n\}$$

$$\mathcal{D} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$$

τρεις βάσεις του  $\mathcal{E}$ . Αν  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathcal{B}$  στη βάση  $\mathcal{C}$ , αν  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$  είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathcal{C}$  στη βάση  $\mathcal{D}$ , και αν  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$  είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathcal{B}$  στη βάση  $\mathcal{D}$  να δειχθεί ότι:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$$

**Λύση.** Έστω  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (a_{ij})$ ,  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} = (b_{jk})$ , και  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = (c_{ik})$ . Τότε θα έχουμε:

$$\forall j = 1, 2, \dots, n : \quad \vec{c}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i \quad (1)$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, n : \quad \vec{f}_k = \sum_{j=1}^n b_{jk} \vec{c}_j \quad (2)$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, n : \quad \vec{f}_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} \vec{e}_i \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις (1) και (2), θα έχουμε,  $\forall k = 1, 2, \dots, n$ :

$$\vec{f}_k = \sum_{j=1}^n b_{jk} \vec{c}_j = \sum_{j=1}^n b_{jk} \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) \vec{e}_i$$

Χρησιμοποιώντας την (3) και την υπόθεση ότι το σύνολο  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  είναι βάση του  $\mathcal{E}$ , θα έχουμε ότι,  $\forall k = 1, 2, \dots, n$ :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

Όμως το στοιχείο στο δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης είναι το στοιχείο στην  $(i, k)$ -θέση του πίνακα  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$  και το στοιχείο στο πρώτο μέλος της παραπάνω σχέσης είναι το στοιχείο στην  $(i, k)$ -θέση του πίνακα  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ . Επειδή οι δείκτες  $i, k = 1, 2, \dots, n$  επιλέχθηκαν τυχαία, προκύπτει ότι:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  είναι υπόχωροι ενός  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ , τότε το άθροισμα υπόχωρων

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{E} \mid \vec{u} \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v} \in \mathcal{V}\}$$

καλείται **ευθύ άθροισμα** αν κάθε διάνυσμα  $\vec{x}$  του  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως  $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ , δηλαδή:

$$\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2, \quad \text{όπου } \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V} \implies \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \text{ και } \vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

Αν το άθροισμα των υπόχωρων  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  είναι ευθύ, θα γράφουμε:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

**Άσκηση 14.** Αν  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  είναι υπόχωροι ενός  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ , τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) το άθροισμα υπόχωρων  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  είναι ευθύ.

(2)

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}, \text{ όπου } \vec{u} \in \mathcal{U} \text{ και } \vec{v} \in \mathcal{V} \implies \vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$$

(3)  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$ .

**Λύση.** (1)  $\implies$  (2) Υποθέτουμε ότι το άθροισμα των υπόχωρων  $\mathcal{U}$  και του  $\mathcal{V}$  είναι ευθύ, και έστω  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ , όπου  $\vec{u} \in \mathcal{U}$  και  $\vec{v} \in \mathcal{V}$ . Τότε, επειδή  $\vec{0} \in \mathcal{U}$  και  $\vec{0} \in \mathcal{V}$ , από τη μοναδικότητα της γραφής, θα έχουμε:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \implies \vec{u} = \vec{0} \text{ και } \vec{v} = \vec{0}$$

(2)  $\implies$  (3) Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (2) και έστω  $\vec{x} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ . Τότε  $\vec{x} \in \mathcal{U}$  και  $\vec{x} \in \mathcal{V}$ , ιδιαίτερα  $-\vec{x} \in \mathcal{V}$  επειδή ο  $\mathcal{V}$  είναι υπόχωρος του  $\mathcal{E}$ . Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, θα έχουμε:

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \text{ όπου } \vec{x} \in \mathcal{U} \text{ και } -\vec{x} \in \mathcal{V} \implies \vec{x} = -\vec{x} = \vec{0}$$

Άρα  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$ .

(3)  $\implies$  (1) Υποθέτουμε ότι  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$ , και έστω ότι  $\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$ , όπου  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathcal{U}$  και  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}$ . Τότε, χρησιμοποιώντας ότι οι  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  είναι υπόχωροι, θα έχουμε:

$$\mathcal{U} \ni \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \in \mathcal{V} \implies \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\} \implies \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \text{ και } \vec{v}_1 = \vec{v}_2$$

και επομένως ισχύει η μοναδικότητα της γραφής ενός διανύσματος του  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  ως άθροισμα διανυσμάτων του  $\mathcal{U}$  και του  $\mathcal{V}$ , δηλαδή το άθροισμα  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  είναι ευθύ.

**Άσκηση 15.** Θεωρούμε τα ακόλουθους υπόχωρους του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $M_2(\mathbb{K})$ :

$$\mathcal{U} = \left\langle A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{V} = \left\langle C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Να βρεθούν βάσεις των  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  και ναδειχθεί ότι:

$$M_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

**Λύση.** Οι πίνακες  $A, B$  είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, διότι:

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B = 0 \implies \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Οι πίνακες  $C, D$  είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, διότι:

$$\lambda_1 C + \lambda_2 D = 0 \implies \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -\lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Άρα το σύνολο  $\mathcal{B} = \{A, B\}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{U}$  και  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = 2$ , και το σύνολο  $\mathcal{C} = \{C, D\}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{V}$  και  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 2$ .

Έστω  $X \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ . Επειδή  $X \in \mathcal{U}$ , έπεται ότι

$$X = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 + x_2 & x_2 \end{pmatrix}$$

Επειδή  $X \in \mathcal{V}$ , έπεται ότι

$$X = y_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 + y_2 & y_1 \\ -y_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 + x_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 + y_2 & y_1 \\ -y_2 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = -y_1 + y_2 & \text{και} & x_2 = y_1 \\ x_1 + x_2 = -y_2 & \text{και} & x_2 = 0 \end{cases}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, βλέπουμε εύκολα ότι  $x_1 = x_2 = 0 = y_1 = y_2$ , δηλαδή  $X = 0$ . Επομένως

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{0\} \quad (1)$$

Έστω  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$  και έστω

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= x_1 A + x_2 B + y_1 C + y_2 D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 + x_2 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_1 + y_2 & y_1 \\ -y_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 + y_2 & x_2 + y_1 \\ x_1 + x_2 - y_2 & x_2 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} x_1 - y_1 + y_2 = a & \text{και} & x_2 + y_1 = b \\ x_1 + x_2 - y_2 = c & \text{και} & x_2 = d \end{cases} \end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα με αγνώστους τα  $x_1, x_2, y_1, y_2$ , βλέπουμε εύκολα ότι:

$$x_1 = \frac{a + b + c - d}{2}, \quad x_2 = d, \quad y_1 = b - d, \quad y_2 = \frac{a - c + b}{2}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες  $A, B, C, D$  παράγουν τον χώρο  $M_2(\mathbb{K})$  και άρα

$$M_2(\mathbb{K}) = \langle A, B, C, D \rangle$$

Επειδή  $A, B \in \mathcal{U}$  και  $C, D \in \mathcal{V}$ , έπεται ότι  $A, B, C, D \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$  και επομένως  $\langle A, B, C, D \rangle \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{V}$ . Τότε όμως θα έχουμε:

$$M_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} + \mathcal{V} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έπεται ότι:

$$M_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

**Άσκηση 16.** Έστω  $\mathcal{E}$  ένας  $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  δύο υπόχωροι του  $\mathcal{E}$ . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1)  $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ .
- (2) Ικανοποιούνται δύο από τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:
  - (α)  $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ .
  - (β)  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$ .
  - (γ)  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$ .

**Λύση.** (1)  $\implies$  (2) Υποθέτουμε ότι  $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ . Τότε προφανώς  $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$  και από την Άσκηση 14 έπεται ότι  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$ . Επομένως από τον γνωστό τύπο

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \quad (\dagger)$$

θα έχουμε  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$ .

(2)  $\implies$  (1) Θα έχουμε:

- (i) (α') & (β')  $\implies$  (1) Προκύπτει από την Άσκηση 14.
- (ii) (β') & (γ')  $\implies$  (1) Έστω ότι  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$  και  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$ . Από τη σχέση (†) και την υπόθεση, έπεται ότι

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$$

Τότε όμως γνωρίζουμε ότι  $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$  και επομένως από την Άσκηση 14 έπεται ότι  $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ .

- (iii) (α') & (γ')  $\implies$  (1) Έστω ότι  $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$  και  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$ . Τότε πάλι με χρήση του τύπου (†), θα έχουμε  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 0$  και αυτό σημαίνει ότι  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$ . Από την Άσκηση 14 έπεται τότε ότι  $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ .

**Παρατήρηση.** Έστω  $U$  και  $V$  δύο υπόχωροι ενός  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $E$  πεπερασμένης διάστασης. Αν  $A$  είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο γεννητόρων του  $U$  και  $B$  είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο γεννητόρων του  $V$ , τότε:

$$U + V = \langle A \cup B \rangle$$

Πράγματι, επειδή  $A \subseteq U$  και  $B \subseteq V$  έπεται ότι  $A \cup B \subseteq U + V$ . Επομένως  $\langle A \cup B \rangle \subseteq U + V$ .

Αντίστροφα, έστω

$$A = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$$

Αν  $\vec{x} \in U + V$ , τότε  $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ , όπου  $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$  και  $\vec{v} = x'_1\vec{e}_1 + x'_2\vec{e}_2 + \dots + x'_m\vec{e}_m$ , για κάποια  $x_i \in \mathbb{K}$  και  $x'_j \in \mathbb{K}$ ,  $1 \leq i \leq n$  και  $1 \leq j \leq m$ . Τότε  $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n + x'_1\vec{e}_1 + x'_2\vec{e}_2 + \dots + x'_m\vec{e}_m \in \langle A \cup B \rangle$ . Άρα  $U + V \subseteq \langle A \cup B \rangle$  και επομένως  $U + V = \langle A \cup B \rangle$ .

**Άσκηση 17.** Αν  $V$  και  $W$  είναι υπόχωροι ενός  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης  $E$ , τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1)  $E = U \oplus V$ .

(2) Αν  $B$  είναι μια βάση του  $U$  και  $C$  είναι μια βάση του  $V$ , τότε το σύνολο  $B \cup C$  είναι μια βάση του  $E$ .

**Λύση.** (1)  $\implies$  (2) Υποθέτουμε ότι  $E = U \oplus V$ , και έστω

$$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

για βάση του  $U$ , και

$$C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$$

για βάση του  $V$ . Επειδή  $E = U + V$ , και τα σύνολα  $B$  και  $C$  είναι πεπερασμένα σύνολα γεννητόρων των  $U$  και  $V$  αντίστοιχα, από την Παρατήρηση έπεται ότι:

$$E = \langle B \cup C \rangle$$

Έστω ότι

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n + x'_1\vec{e}_1 + x'_2\vec{e}_2 + \dots + x'_m\vec{e}_m = \vec{0} \implies$$

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n = (-x'_1)\vec{e}_1 + (-x'_2)\vec{e}_2 + \dots + (-x'_m)\vec{e}_m$$

Το παραπάνω διάνυσμα ανήκει στον υπόχωρο  $U$  ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης  $B$  του  $U$  και ανήκει στον υπόχωρο  $V$  ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης  $C$  του  $V$ . Επειδή  $E = U \oplus V$ , έχουμε  $U \cap V = \{\vec{0}\}$ , και επομένως το παραπάνω διάνυσμα είναι το μηδενικό:

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n = \vec{0} = (-x'_1)\vec{e}_1 + (-x'_2)\vec{e}_2 + \dots + (-x'_m)\vec{e}_m$$

Επειδή τα διανύσματα  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  και τα διανύσματα  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι  $x_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$  και  $x'_j = 0$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο  $B \cup C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο  $B \cup C$  είναι μια βάση του  $E$ .

(2)  $\implies$  (1) Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (2) και έστω  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  μια βάση του  $U$ , οπότε  $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ , και  $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$  μια βάση του  $V$ , οπότε  $\dim_{\mathbb{K}} V = m$ . Τότε από την υπόθεση, το σύνολο  $B \cup C$  είναι μια βάση του  $E$ , ιδιαίτερα  $\langle B \cup C \rangle = E$ . Από την Παρατήρηση γνωρίζουμε ότι πάντοτε έχουμε  $\langle B \cup C \rangle = U + V$ , και επομένως  $E = U + V$ .

Έστω  $\vec{x} \in U \cap V$ . Τότε  $\vec{x} \in U$  και  $\vec{x} \in V$  και άρα μπορούμε να γράψουμε μοναδικά:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n = x'_1\vec{e}_1 + x'_2\vec{e}_2 + \dots + x'_m\vec{e}_m \implies$$

$$\implies x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n + (-x'_1)\vec{e}_1 + (-x'_2)\vec{e}_2 + \dots + (-x'_m)\vec{e}_m = \vec{0}$$

Λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας του συνόλου  $B \cup C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ , θα έχουμε

$$x_i = x'_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

και επομένως  $\vec{x} = \vec{0}$ . Με άλλα λόγια δείξαμε ότι:  $U \cap V = \{\vec{0}\}$ . Άρα  $E = U \oplus V$ .

**Άσκηση 18.** Έστω  $\mathcal{U}$  ένας υπόχωρος ενός  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$  πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας υπόχωρος  $\mathcal{V}$  του  $\mathcal{E}$  έτσι ώστε:

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

Είναι ο υπόχωρος  $\mathcal{V}$  μοναδικός:

**Λύση.** Γνωρίζουμε ότι ο υπόχωρος  $\mathcal{U}$  έχει πεπερασμένη διάσταση. Έστω  $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$  μια βάση του  $\mathcal{U}$ . Από γνωστό Θεώρημα, το σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων  $\mathcal{B}$  μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n\}$  μια βάση του  $\mathcal{E}$ . Θέτουμε  $\mathcal{D} = \{\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n\}$  και:

$$\mathcal{V} = \langle \mathcal{D} \rangle = \langle \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n \rangle$$

Προφανώς τότε θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = k \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = n - k \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$$

Επειδή  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$  και  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}$ , έπεται ότι  $\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{V}$  και επομένως  $\mathcal{E} = \langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \rangle \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{V}$ . Άρα  $\mathcal{E} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$  και τότε από την Άσκηση 16 έχουμε:  $\mathcal{E} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ .

Στον  $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^2$ , θεωρούμε τον υπόχωρο

$$\mathcal{U} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0) \rangle$$

και τους υπόχωρους,  $\forall k \geq 0$ :

$$\mathcal{V}_k = \{(ky, (k+1)y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} = \{y(k, k+1) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle (k, k+1) \rangle$$

Τότε,  $\forall k \geq 0$ :

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} = 1 \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_k = 1 \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_k$$

Αν  $\vec{a} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_k$ , τότε  $\vec{a} = (x, 0)$  και  $\vec{a} = (ky, (k+1)y)$ . Θα έχουμε  $ky = x$  και  $(k+1)y = 0$ , από όπου έπεται ότι  $y = 0$  διότι  $k \geq 0$ . Τότε  $x = 0$  και επομένως  $\vec{a} = (0, 0)$ . Δηλαδή  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_k = \{\vec{0}\}$ ,  $\forall k \geq 0$ . Από την Άσκηση 16 προκύπτει ότι:

$$\mathbb{R}^2 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}_k, \quad \forall k \geq 0$$

Επειδή προφανώς οι (άπειροι σε πλήθος) υπόχωροι  $\mathcal{V}_k$  είναι ανά δύο διαφορετικοί, έπεται ότι υπάρχει άπειρο πλήθος ανά δύο διαφορετικών υπόχωρων  $\mathcal{V}_k$  έτσι ώστε  $\mathbb{R}^2 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}_k$ .

**Άσκηση 19.** Θεωρούμε δύο στοιχεία  $a, b$  ενός σώματος  $\mathbb{K}$  και έστω ο ακόλουθος  $2 \times 2$  πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{U} = \{X \in M_2(\mathbb{K}) \mid AX = XA\}$$

(1) Να δειχθεί ότι το σύνολο  $\mathcal{U}$  είναι ένας υπόχωρος του  $M_2(\mathbb{K})$  και να βρεθεί μια βάση του.

(2) Να βρεθεί υπόχωρος  $\mathcal{V}$  του  $M_2(\mathbb{K})$  έτσι ώστε:

$$M_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

**Λύση.** (α) Αν  $b = 0$ , τότε  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2$ , και τότε,  $\forall X \in M_2(\mathbb{K})$ :  $AX = aI_2X = aXI_2 = XaI_2 = XA$ . Δηλαδή  $\mathcal{U} = M_2(\mathbb{K})$ , και τότε μπορούμε να επιλέξουμε  $\mathcal{V} = \{\vec{0}\}$ .

(β) Υποθέτουμε ότι  $b \neq 0$ .

Έστω  $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ . Τότε:

$$\begin{aligned} AX = XA &\implies \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \implies \\ &\implies \begin{pmatrix} ax_1 + bx_3 & ax_2 + bx_4 \\ bx_1 + ax_3 & bx_2 + ax_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 & ax_2 + bx_1 \\ bx_4 + ax_3 & bx_3 + ax_4 \end{pmatrix} \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_3 = ax_1 + bx_2 &\stackrel{b \neq 0}{\implies} x_2 = x_3 \\ ax_2 + bx_4 = ax_2 + bx_1 &\stackrel{b \neq 0}{\implies} x_1 = x_4 \end{aligned}$$

Άρα  $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ . Αντίστροφα, αν  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ , τότε εύκολα βλέπουμε ότι θα έχουμε  $AX = XA$ , δηλαδή  $X \in \mathcal{U}$ . Άρα:

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επειδή οι πίνακες  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  και  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητοι, έπεται ότι το σύνολο  $\mathcal{C} = \{I_2, J\}$  είναι μια βάση του  $M_2(\mathbb{K})$ . Γνωρίζουμε ότι  $\dim_{\mathbb{K}} M_2(\mathbb{K}) = 4$ . Συμπληρώνουμε το σύνολο  $\mathcal{C}$  σε μια βάση  $\mathcal{B}$  του  $M_2(\mathbb{K})$ : θεωρούμε τους πίνακες

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εύκολα βλέπουμε<sup>2</sup> ότι το σύνολο  $\mathcal{B} = \{I_2, J, K, L\}$  είναι μια βάση του  $M_2(\mathbb{K})$ . Θέτουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \langle K, L \rangle &= \left\{ x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} \end{aligned}$$

από την Άσκηση 18 έπεται ότι:

$$M_2(\mathbb{K}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

**Άσκηση 20.** Να δείχθει ότι:

$$\mathbb{K}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\} \\ \mathcal{V} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\} \end{aligned}$$

**Λύση.** Από την Άσκηση 1, θέτοντας  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$ , έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \dots, \vec{\epsilon}_{n-1}\}$$

είναι μια βάση του  $\mathcal{U}$ , όπου

$$\vec{\epsilon}_1 = (-1, 1, 0, \dots, 0), \quad \vec{\epsilon}_2 = (-1, 0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad \vec{\epsilon}_{n-1} = (-1, 0, \dots, 0, 1)$$

Επομένως  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = n - 1$ . Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\} = \{(x, x, \dots, x) \in \mathbb{K}^n \mid x \in \mathbb{K}\} = \\ &= \{x(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{K}^n \mid x \in \mathbb{K}\} = \langle \epsilon_n = (1, 1, \dots, 1) \rangle \end{aligned}$$

Επομένως  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 1$ .

Έστω  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ . Τότε:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \quad \text{και} \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n := x \implies nx = 0 \implies x = 0 \implies \vec{x} = \vec{0}$$

Επομένως  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{\vec{0}\}$ . Επειδή  $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n = n - 1 + 1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$ , από την Άσκηση 16 έπεται ότι  $\mathbb{K}^n = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ .

<sup>2</sup>Για παράδειγμα θεωρώντας τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ο οποίος σχηματίζεται από τις συνιστώσες των πινάκων του συνόλου  $\mathcal{B} = \{I_2, J, K, L\}$  ως προς την κανονική βάση του  $M_2(\mathbb{K})$ , και ο οποίος έχει μη-μηδενική ορίζουσα, έπεται ότι το  $\mathcal{B}$  είναι μια βάση του  $M_2(\mathbb{K})$ .

**Άσκηση 21.** Θεωρούμε τον  $\mathbb{R}$ -διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}_n[x]$  των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ  $n$  υπεράνω του  $\mathbb{R}$ , και έστω  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν  $1 \leq k \leq n$ , θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{V}_k = \{P(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid P(\rho_1) = P(\rho_2) = \dots = P(\rho_k) = 0\}$$

Ναδειχθεί ότι:

$$\mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_{k-1}[x] \oplus \mathcal{V}_k$$

**Λύση.** Από την Άσκηση 9 γνωρίζουμε ότι το σύνολο  $\mathcal{V}_k$  είναι ένας υπόχωρος του  $\mathbb{R}_n[x]$  με διάσταση

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}_k = n - k + 1$$

και το σύνολο

$$\mathcal{B}_k = \{\Pi(x), x\Pi(x), x^2\Pi(x), \dots, x^{n-k}\Pi(x)\}$$

είναι μια βάση του  $\mathcal{V}_k$ , όπου:

$$\Pi(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_k) \in \mathbb{K}_n[x]$$

Θεωρούμε το σύνολο  $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, \dots, x^{k-1}\}$ . Από την Άσκηση 9, γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_k = \{1, x, x^2, \dots, x^{k-1}, \Pi(x), x\Pi(x), x^2\Pi(x), \dots, x^{n-k}\Pi(x)\}$$

είναι μια βάση του  $\mathbb{R}_n[x]$  η οποία συμπληρώνει τη βάση  $\mathcal{B}_k$  του  $\mathcal{V}_k$ . Προφανώς θα έχουμε:  $\mathbb{R}_{k-1}[x] = \langle \mathcal{C} \rangle$ . Από την Άσκηση 18 προκύπτει τότε ότι:

$$\mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_{k-1}[x] \oplus \mathcal{V}_k$$

**Άσκηση 22.** Θεωρούμε το σύνολο

$$S_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^t A = A\}$$

των συμμετρικών  $n \times n$  πινάκων, και το σύνολο

$$A_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid {}^t A = -A\}$$

των αντισυμμετρικών  $n \times n$  πινάκων.

(1) Ναδειχθεί ότι:

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$

(2) Να βρεθούν οι διαστάσεις των υπόχωρων  $S_n(\mathbb{K})$  και  $A_n(\mathbb{K})$ .

(3) Αν  $n = 3$ , να βρεθούν βάσεις των υπόχωρων  $S_n(\mathbb{K})$  και  $A_n(\mathbb{K})$ .

**Λύση.** (1) Έστω  $A \in S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K})$ . Τότε:

$${}^t A = A \quad \text{και} \quad {}^t A = -A \quad \implies \quad A = -A \quad \implies \quad 2A = 0 \quad \implies \quad A = 0$$

Επομένως:

$$S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{0\} \quad (*)$$

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Τότε:

$$\begin{aligned} {}^t \left( \frac{A + {}^t A}{2} \right) &= \frac{{}^t(A + {}^t A)}{2} = \frac{{}^t A + A}{2} \implies \frac{{}^t A + A}{2} \in S_n(\mathbb{K}) \\ {}^t \left( \frac{A - {}^t A}{2} \right) &= \frac{{}^t(A - {}^t A)}{2} = \frac{{}^t A - A}{2} = -\frac{A - {}^t A}{2} \implies \frac{A - {}^t A}{2} \in A_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Επειδή

$$A = \frac{A + {}^t A}{2} + \frac{A - {}^t A}{2}$$

έπεται ότι θα έχουμε:

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K}) \quad (**)$$

Από τις σχέσεις (\*) και (\*\*), έπεται ότι:

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$

(2) Από την Άσκηση 16 έχουμε:

$$n^2 = \dim_{\mathbb{K}} M_n(\mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} S_n(\mathbb{K}) + \dim_{\mathbb{K}} A_n(\mathbb{K}) \quad (\dagger)$$

Έστω  $A = (a_{ij})$  ένας αντισυμμετρικός πίνακας. Τότε  $a_{ij} = -a_{ji}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Ιδιαίτερα προκύπτει ότι  $a_{ii} = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , και ο  $A$  έχει την ακόλουθη μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Για κάθε  $1 \leq r < s \leq n$ , θεωρούμε τους πίνακες  $J_{rs} = (x_{ij})$ , όπου  $x_{ij} = 0$ ,  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ , εκτός από τις θέσεις  $x_{rs} = 1$  και  $x_{sr} = -1$ . Είναι τότε προφανές ότι κάθε αντισυμμετρικός πίνακας  $A$  όπως παραπάνω, γράφεται ως:

$$A = \sum_{1 \leq r < s \leq n} a_{rs} J_{rs}$$

Επομένως

$$A_n(\mathbb{K}) = \langle J_{rs} \in M_n(\mathbb{K}) \mid 1 \leq r < s \leq n \rangle$$

και επειδή προφανώς το σύνολο  $\mathcal{C} = \{J_{rs} \in M_n(\mathbb{K}) \mid 1 \leq r < s \leq n\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι το  $\mathcal{C}$  είναι μια βάση του  $A_n(\mathbb{K})$ . Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου  $\mathcal{C}$  είναι ίσο με  $\frac{n^2-n}{2}$ , και επομένως:

$$\dim_{\mathbb{K}} A_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2 - n}{2}$$

και τότε από τον τύπο ( $\dagger$ ), θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} S_n(\mathbb{K}) = n^2 - \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Μια βάση του  $S_n(\mathbb{K})$  είναι τότε το σύνολο των συμμετρικών πινάκων

$$\{I_{rs} = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) \mid x_{rs} = x_{sr} = 1 \text{ και } x_{ij} = 0, \text{ για κάθε } 1 \leq i, j \leq n \text{ με } i \neq r \text{ ή } j \neq s\}$$

(3) Σύμφωνα με το μέρος (2), θα έχουμε τη βάση

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

του υπόχωρου  $A_3(\mathbb{K})$ , και τη βάση

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

του υπόχωρου  $S_3(\mathbb{K})$ .

Η ένωση αυτών των δύο βάσεων αποτελεί τότε μια βάση του  $M_3(\mathbb{K})$ .

Υπενθυμίζουμε ότι αν  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$  είναι υπόχωροι ενός  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ , τότε το άθροισμα υπόχωρων

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n = \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n \in \mathcal{E} \mid \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq n\}$$

καλείται **ευθύ άθροισμα** αν κάθε διάνυσμα  $\vec{x}$  του  $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως  $\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n$ , δηλαδή:

$$\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n, \text{ όπου } \vec{v}_i, \vec{u}_i \in \mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq n \implies \vec{v}_1 = \vec{u}_1, \vec{v}_2 = \vec{u}_2, \dots, \vec{v}_n = \vec{u}_n$$

Αν το άθροισμα των υπόχωρων  $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$  είναι ευθύ, θα γράφουμε:

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n$$



**Άσκηση 23.** Έστω  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  ένα σύνολο διανυσμάτων του  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ . Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Το σύνολο  $\mathcal{B}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{E}$ .  
 (2)

$$\mathcal{E} = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$$

**Λύση.** « $\implies$ » Υποθέτουμε ότι το σύνολο  $\mathcal{B}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{E}$ . Τότε κάθε διάνυσμα  $\vec{x}$  γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου  $\mathcal{B}$ :  $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$ , όπου  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Επειδή  $\lambda_i \vec{e}_i \in \langle \vec{e}_i \rangle$ , προκύπτει ότι  $\vec{x} \in \langle \vec{e}_1 \rangle + \langle \vec{e}_2 \rangle + \dots + \langle \vec{e}_n \rangle$  και επομένως  $\mathcal{E} = \langle \vec{e}_1 \rangle + \langle \vec{e}_2 \rangle + \dots + \langle \vec{e}_n \rangle$ . Έστω  $\vec{x} = \kappa_1 \vec{e}_1 + \kappa_2 \vec{e}_2 + \dots + \kappa_n \vec{e}_n$  μια άλλη γραφή του  $\vec{x}$  ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου  $\mathcal{B}$ . Τότε

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \kappa_1 \vec{e}_1 + \kappa_2 \vec{e}_2 + \dots + \kappa_n \vec{e}_n \implies (\lambda_1 - \kappa_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \kappa_2) \vec{e}_2 + \dots + (\lambda_n - \kappa_n) \vec{e}_n = \vec{0}$$

και άρα λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων του συνόλου  $\mathcal{B}$  έπεται ότι  $\lambda_i = \kappa_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα  $\vec{x}$  του  $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως  $\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n$ , και επομένως  $\mathcal{E} = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$ .

« $\impliedby$ » Υποθέτουμε ότι  $\mathcal{E} = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$ . Τότε κάθε διάνυσμα  $\vec{x}$  του  $\mathcal{E}$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{e}_2 + \dots + \vec{x}_n$ , όπου  $\vec{x}_i \in \langle \vec{e}_i \rangle$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Τότε όμως  $\vec{x} = \lambda_i \vec{e}_i$ , για κάποια  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  και επομένως  $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$ . Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο  $\mathcal{B}$  είναι ένα σύνολο γεννητόρων του  $\mathcal{E}$ . Αν  $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}$ , τότε θα έχουμε:  $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \dots + 0\vec{e}_n$ , και άρα λόγω μοναδικότητας της γραφής του διανύσματος  $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$ , θα έχουμε  $\lambda_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Άρα το σύνολο  $\mathcal{B}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως είναι μια βάση του  $\mathcal{E}$ .

**Άσκηση 24.** Αν  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$  είναι υπόχωροι ενός  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$ , τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (1) Το άθροισμα των υπόχωρων  $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$  είναι ευθύ:

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n$$

- (2)

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \vec{0}, \text{ όπου } \vec{v}_i \in \mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq n \implies \vec{v}_i = \vec{0}, 1 \leq i \leq n$$

- (3)

$$\forall i = 1, 2, \dots, n: \mathcal{V}_i \cap (\mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$$

**Λύση.** (1)  $\implies$  (2) Υποθέτουμε ότι το άθροισμα των υπόχωρων  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$  είναι ευθύ, και έστω  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \vec{0}$ , όπου  $\vec{v}_i \in \mathcal{V}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Τότε, επειδή  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  έχουμε  $\vec{0} \in \mathcal{V}_i$ , από την μοναδικότητα της γραφής έπεται ότι:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \dots + \vec{0} \implies \vec{v}_i = \vec{0} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

(2)  $\implies$  (3) Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (2) και έστω  $\vec{x} \in \mathcal{V}_i \cap (\mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n)$ . Τότε  $\vec{x} \in \mathcal{V}_i$  και  $\vec{x} \in \mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n$ , και επομένως  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{i-1} + \vec{x}_{i+1} + \dots + \vec{x}_n$ , όπου  $\vec{x}_j \in \mathcal{V}_j$ ,  $1 \leq j \neq i \leq n$ . Τότε θα έχουμε:

$$\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{i-1} + (-\vec{x}) + \vec{x}_{i+1} + \dots + \vec{x}_n = \vec{0}$$

και επομένως από τη συνθήκη (2) προκύπτει ότι:

$$\vec{x}_1 = \dots = \vec{x}_{i-1} = (-\vec{x}) = \vec{x}_{i+1} = \dots = \vec{x}_n = \vec{0}$$

$\vec{x} = \vec{0}$ . Αυτό σημαίνει ότι  $\mathcal{V}_i \cap (\mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$ .

(3)  $\implies$  (1) Υποθέτουμε ότι  $\mathcal{V}_i \cap (\mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$ , και έστω

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n, \text{ όπου } \vec{v}_i, \vec{u}_i \in \mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq n$$

Τότε,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ , θα έχουμε

$$\vec{v}_i - \vec{u}_i = (\vec{u}_1 - \vec{v}_1) + \dots + (\vec{u}_{i-1} - \vec{v}_{i-1}) + (\vec{u}_{i+1} - \vec{v}_{i+1}) + \dots + (\vec{u}_n - \vec{v}_n)$$

Επειδή  $\vec{v}_i - \vec{u}_i \in \mathcal{V}_i$  και  $\vec{u}_j - \vec{v}_j \in \mathcal{V}_j, \forall j = 1, 2, \dots, n$  με  $j \neq i$ , έπεται ότι  $(\vec{u}_1 - \vec{v}_1) + \dots + (\vec{u}_{i-1} - \vec{v}_{i-1}) + (\vec{u}_{i+1} - \vec{v}_{i+1}) + \dots + (\vec{u}_n - \vec{v}_n) \in (\mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n)$ . Τότε

$$\vec{v}_i - \vec{u}_i \in \mathcal{V}_i \cap (\mathcal{V}_1 + \dots + \mathcal{V}_{i-1} + \mathcal{V}_{i+1} + \dots + \mathcal{V}_n) = \{\vec{0}\}$$

Άρα  $\vec{v}_i = \vec{u}_i$ , και επειδή το  $i = 1, 2, \dots, n$  επιλέχθηκε τυχαία, έπεται ότι  $\vec{v}_i = \vec{u}_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , δηλαδή ισχύει η μοναδικότητα της γραφής ενός διανύσματος του  $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$  ως άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων  $\mathcal{V}_i, 1 \leq i \leq n$ . Επομένως το άθροισμα  $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_n$  είναι ευθύ.

Αν  $A$  και  $B$  είναι υποσύνολα ενός συνόλου  $X$ , τότε γνωρίζουμε ότι:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Όπως έχουμε αποδείξει στο μάθημα, η παραπάνω σχέση γενικεύεται για υπόχωρους: αν  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  είναι υπόχωροι ενός  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$  πεπερασμένης διάστασης, τότε:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

Τι συμβαίνει για τρεις υπόχωρους:

Αν  $A, B$  και  $C$  είναι υποσύνολα ενός συνόλου  $X$ , τότε<sup>3</sup>:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

**Άσκηση 25.** Αν  $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$  είναι υπόχωροι ενός  $\mathbb{K}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathcal{E}$  πεπερασμένης διάστασης, να εξετασθεί αν ισχύει ότι:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W})$$

**Λύση.** Έστω  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$  και θεωρούμε τους υπόχωρους:

$$\mathcal{U} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{V} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{W} = \{(z, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Τότε προφανώς θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} + \mathcal{V} &= \mathbb{R}^2 \quad \text{και άρα} \quad \mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{U} \cap \mathcal{V} &= \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\} \end{aligned}$$

Έτσι το πρώτο μέλος της ζητούμενης ισότητας είναι 2 και το δεύτερο μέλος είναι ίσο με  $3 = 1 + 1 + 1$ . Άρα η ζητούμενη ισότητα **δεν** ισχύει.

Θα δείξουμε ότι ισχύει πάντα η ακόλουθη ανισότητα:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}) \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W})$$

Θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}) &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}((\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}) = \\ &= \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) - \dim_{\mathbb{K}}((\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}) \end{aligned} \quad (\dagger)$$

Από την άθλη πλευρά έχουμε:

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \subseteq (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W} \quad (\dagger\dagger)$$

Πράγματι, έστω  $\vec{x} \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$ . Τότε  $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ , όπου  $\vec{u} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$  και  $\vec{v} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ . Επομένως  $\vec{x} \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$  και επειδή ο  $\mathcal{W}$  είναι υπόχωρος και  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{W}$ , θα έχουμε  $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{W}$ . Άρα  $\vec{x} \in (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}$  και επομένως  $(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \subseteq (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}$ .

Από τη σχέση  $(\dagger\dagger)$  έπεται ότι

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}((\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W})) &\leq \dim_{\mathbb{K}}((\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}) \implies \\ \implies -\dim_{\mathbb{K}}((\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}) &\leq -\dim_{\mathbb{K}}((\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W})) \end{aligned} \quad (*)$$

<sup>3</sup>Δείξτε το σαν Άσκηση.

Όμως

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}((\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W})) &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \implies \\ & - \dim_{\mathbb{K}}((\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}) \leq -\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \end{aligned} \quad (**)$$

Από τις σχέσεις (†) και (\*\*) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W}) &= \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) - \dim_{\mathbb{K}}((\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap \mathcal{W}) \leq \\ & \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \end{aligned}$$