

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

## ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 17 Δεκεμβρίου 2021

**Άσκηση 1.** Να εξετασθεί αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση:

(1)  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  έτσι ώστε:

$$\text{Ker}(f) = \langle (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle = \text{Im}(f)$$

(2)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  έτσι ώστε:

$$\text{Ker}(f) = \langle (1, 1, 0), (1, 1, 1) \rangle \quad \text{και} \quad \text{Im}(f) = \langle (1, 0, 0, 0), (2, 0, 1, 0) \rangle$$

(3)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  έτσι ώστε:

$$\text{Im}(f) = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

και ο πίνακας της  $f$  ως προς κατάλληλες βάσεις  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{B}'$  του  $\mathbb{R}^3$  να είναι ο

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Λύση.** (1) Τα διανύσματα  $(1, 1, 0, 0)$  και  $(1, 0, 0, 0)$  είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν μια βάση του  $\text{Ker}(f)$ , την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση

$$\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{e}_2 = (1, 1, 1, 0), \vec{e}_3 = (1, 1, 0, 0), \vec{e}_4 = (1, 0, 0, 0) \}$$

του  $\mathbb{R}^4$ . Το παραπάνω σύνολο είναι μια βάση του  $\mathbb{R}^4$  διότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Ορίζουμε γραμμική απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  ως εξής:

$$f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2) \in \langle \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle \quad \text{και} \quad f(\vec{e}_3) = f(\vec{e}_4) = (0, 0, 0, 0)$$

Για παράδειγμα, θέτουμε:  $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_3$  και  $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_4$ . Αν  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ , τότε εύκολα μπορούμε να δούμε ότι:

$$(x, y, z, w) = w\vec{e}_1 + (z - w)\vec{e}_2 + (y - z)\vec{e}_3 + (x - y)\vec{e}_4$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= f(w\vec{e}_1 + (z - w)\vec{e}_2 + (y - z)\vec{e}_3 + (x - y)\vec{e}_4) = \\ &= wf(\vec{e}_1) + (z - w)f(\vec{e}_2) + (y - z)f(\vec{e}_3) + (x - y)f(\vec{e}_4) = \\ &= w\vec{e}_3 + (z - w)\vec{e}_4 = w(1, 1, 0, 0) + (z - w)(1, 0, 0, 0) = (w, w, 0, 0) + (z - w, 0, 0, 0) = (z, w, 0, 0) \end{aligned}$$

δηλαδή:

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z, w) = (z, w, 0, 0)$$

Τότε εκ' κατασκευής έχουμε:

$$\text{Ker}(f) = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle = \text{Im}(f)$$

(2) Υποθέτουμε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  έτσι ώστε:

$$\text{Ker}(f) = \langle (1, 1, 0), (1, 1, 1) \rangle \quad \text{και} \quad \text{Im}(f) = \langle (1, 0, 0, 0), (2, 0, 1, 0) \rangle$$

Τα διανύσματα  $(1, 1, 0)$  και  $(1, 1, 1)$  είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του  $\text{Ker}(f)$ . Παρόμοια τα διανύσματα  $(1, 0, 0, 0)$  και  $(2, 0, 1, 0)$  είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του  $\text{Im}(f)$ . Από τα παραπάνω έπεται ότι  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f) = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f)$ . Από την εξίσωση διαστάσεων για την  $f$  τότε προκύπτει ότι  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 4$  το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια γραμμική απεικόνιση.

(3) Υποθέτουμε ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  έτσι ώστε:

$$\text{Im}(f) = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

και ο πίνακας της  $f$  ως προς κατάλληλες βάσεις  $\mathcal{B}$   $\mathcal{B}'$  του  $\mathbb{R}^3$  να είναι ο

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Προφανώς  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f) = 1 \neq 3$  και επομένως  $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ , δηλαδή η  $f$  δεν είναι επιμορφισμός ή ισοδύναμα η  $f$  δεν είναι ισομορφισμός. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας της  $f$  ως προς τυχόν ζευγάρι βάσεων  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{B}'$  του  $\mathbb{R}^3$  δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Επειδή, όπως μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα,  $|A| = 1 \neq 0$ , ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος. Επομένως ο πίνακας  $A$  δεν μπορεί να είναι πίνακας της  $f$  ως προς οποιοδήποτε ζευγάρι βάσεων του  $\mathbb{R}^3$ . Άρα δεν υπάρχει τέτοια γραμμική απεικόνιση.

### Άσκηση 2. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (y + z, x + z, y + x)$$

(1) Να βρεθεί ο πίνακας  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  της  $f$ , όπου

$$\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \}$$

είναι η κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$ .

(2) Να βρεθεί ο πίνακας  $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$  της  $f$ , όπου  $\mathcal{C}$  είναι η ακόλουθη βάση του  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{C} = \{ \vec{c}_1 = (1, 1, 1), \vec{c}_2 = (1, -1, 0), \vec{c}_3 = (1, 1, -2) \}$$

(3) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = B$$

**Λύση.** (1) Επειδή η βάση  $\mathcal{B}$  είναι η κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$ , μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τον πίνακα  $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  της  $f$  στη βάση  $\mathcal{B}$  ως εξής:

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0, 0) = (0, 1, 1) = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_2) = f(0, 1, 0) = (1, 0, 1) = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_3) = f(0, 0, 1) = (1, 1, 0) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

Επομένως θα έχουμε:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Για να υπολογίσουμε τον πίνακα  $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$  της  $f$  ως προς τη βάση  $\mathcal{C}$ , θα έχουμε:

$$f(\vec{c}_1) = f(1, 1, 1) = (2, 2, 2) = a\vec{c}_1 + b\vec{c}_2 + c\vec{c}_3 = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(1, 1, -2) =$$

$$= (a + b + c, a - b + c, a - 2c) \implies \begin{cases} a + b + c = 2 \\ a - b + c = 2 \\ a - 2c = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Άρα:

$$f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_2) &= f(1, -1, 0) = (-1, 1, 0) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(1, 1, -2) = \\ &= (a + b + c, a - b + c, a - 2c) \implies \begin{cases} a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \\ a - 2c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα:

$$f(\vec{e}_2) = 0\vec{e}_1 - 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_3) &= f(1, 1, -2) = (-1, -1, 2) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(1, 1, -2) = \\ &= (a + b + c, a - b + c, a - 2c) \implies \begin{cases} a + b + c = -1 \\ a - b + c = -1 \\ a - 2c = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα:

$$f(\vec{e}_3) = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 - 1\vec{e}_3$$

Επομένως θα έχουμε:

$$B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) Οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι όμοιοι διότι είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης ως προς τα ζεύγη βάσεων  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{C}$ . Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος  $3 \times 3$  πίνακας  $P$  έτσι ώστε  $P^{-1}AP = B$ . Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας  $P$  είναι ο πίνακας μετάβασης  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  από τη βάση  $\mathcal{B}$  στην βάση  $\mathcal{C}$ . Επομένως για να τον υπολογίσουμε, θα έχουμε:

$$\vec{e}_1 = (1, 1, 1) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 = (1, -1, 0) = 1\vec{e}_1 - 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_3 = (1, 1, -2) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$$

Επομένως θα έχουμε:

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 3.** Ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

έτσι ώστε:

$$f(0, 1, 1) = (0, 1, 3), \quad f(1, 0, 1) = (5, 4, 3), \quad f(1, 1, 0) = (2, 0, 0)$$

Ακολουθώντας:

(1) Να βρεθεί ο πίνακας  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  της  $f$  ως προς τη βάση  $\mathcal{B}$ , όπου

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

είναι η κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$ .

(2) Να βρεθεί ο πίνακας  $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$  της  $f$  ως προς τη βάση  $\mathcal{C}$ , όπου  $\mathcal{C}$  είναι η βάση του  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1 = (1, 1, 1), \vec{e}_2 = (1, 1, 0), \vec{e}_3 = (1, 0, 0)\}$$

(3) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  έτσι ώστε

$$P^{-1}AP = B$$

**Λύση.** Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\vec{e}_1 = (0, 1, 1), \quad \vec{e}_2 = (1, 0, 1), \quad \vec{e}_3 = (1, 1, 0)$$

Επειδή η ορίζουσα του πίνακα των συνιστωσών των διανυσμάτων  $\vec{e}_1, \vec{e}_2,$  και  $\vec{e}_3$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

είναι μη-μηδενική, έπεται ότι τα διανύσματα  $\vec{e}_1, \vec{e}_2,$  και  $\vec{e}_3$  αποτελούν μια βάση του  $\mathbb{R}^3$ . Από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

έτσι ώστε:

$$f(0, 1, 1) = (0, 1, 3), \quad f(1, 0, 1) = (5, 4, 3), \quad f(1, 1, 0) = (2, 0, 0)$$

Για να προσδιορίσουμε την  $f$  εργαζόμαστε ως εξής: έστω  $(x, y, z)$  τυχόν διάνυσμα του  $\mathbb{R}^3$ . Τότε το  $(x, y, z)$  έχει μοναδική γραφή ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης  $\vec{e}_1, \vec{e}_2,$  και  $\vec{e}_3$ :

$$(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(0, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 0) = (b + c, a + c, a + b) \implies$$

$$\implies \begin{cases} b + c = x \\ a + c = y \\ a + b = z \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{-x + y + z}{2} \\ b = \frac{x - y + z}{2} \\ c = \frac{x + y - z}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$(x, y, z) = \frac{-x + y + z}{2} \vec{e}_1 + \frac{x - y + z}{2} \vec{e}_2 + \frac{x + y - z}{2} \vec{e}_3$$

και τότε:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{-x + y + z}{2} f(\vec{e}_1) + \frac{x - y + z}{2} f(\vec{e}_2) + \frac{x + y - z}{2} f(\vec{e}_3) = \\ &= \frac{-x + y + z}{2} (0, 1, 3) + \frac{x - y + z}{2} (5, 4, 3) + \frac{x + y - z}{2} (2, 0, 0) = \\ &= \frac{1}{2} (7x - 3y + 3z, 3x - 3y + 5z, 6z) \end{aligned}$$

Επομένως

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = \frac{1}{2} (7x - 3y + 3z, 3x - 3y + 5z, 6z)$$

(1) Για την εύρεση του πίνακα  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  της  $f$  ως προς την κανονική βάση  $\mathcal{B}$  του  $\mathbb{R}^3$ , θα έχουμε

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0, 0) = \left( \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right) = \frac{7}{2} \vec{e}_1 + \frac{3}{2} \vec{e}_2 + 0 \vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_2) = f(0, 1, 0) = \left( -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0 \right) = -\frac{3}{2} \vec{e}_1 - \frac{3}{2} \vec{e}_2 + 0 \vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_3) = f(0, 0, 1) = \left( \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3 \right) = \frac{3}{2} \vec{e}_1 + \frac{5}{2} \vec{e}_2 + 3 \vec{e}_3$$

Επομένως θα έχουμε:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Για την εύρεση του πίνακα  $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$  της  $f$  ως προς τη βάση  $\mathcal{C}$ , θα έχουμε:

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 1, 1) = \left( \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 3 \right) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) =$$

$$= (a + b + c, a + b, a) \implies \begin{cases} a + b + c = \frac{7}{2} \\ a + b = \frac{5}{2} \\ a = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

Άρα:

$$f(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_2) = f(1, 1, 0) = (2, 0, 0) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) =$$

$$= (a + b + c, a + b, a) \implies \begin{cases} a + b + c = 2 \\ a + b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

Άρα:

$$f(\vec{e}_2) = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}_3) = f(1, 0, 0) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) =$$

$$= (a + b + c, a + b, a) \implies \begin{cases} a + b + c = \frac{7}{2} \\ a + b = \frac{3}{2} \\ a = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{3}{2} \\ c = 2 \end{cases}$$

Άρα:

$$f(\vec{e}_3) = 0\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Επομένως θα έχουμε:

$$B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) Οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι όμοιοι διότι είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης ως προς τα ζεύγη βάσεων  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{C}$ . Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος  $3 \times 3$  πίνακας  $P$  έτσι ώστε  $P^{-1}AP = B$ . Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας  $P$  είναι ο πίνακας μετάβασης  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  από τη βάση  $\mathcal{B}$  στην βάση  $\mathcal{C}$ . Επομένως για να τον υπολογίσουμε, θα έχουμε:

$$\vec{e}_1 = (1, 1, 1) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 = (1, 1, 0) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_3 = (1, 0, 0) = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

Επομένως θα έχουμε:

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 4.** Θεωρούμε τα διανύσματα  $(1, 2, 0, -4)$  και  $(2, 0, -1, -3)$ . Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  έτσι ώστε:  $\text{Im}(f) = \langle (1, 2, 0, -4), (2, 0, -1, -3) \rangle$ . Ακολουθώντας:

(1) Να βρεθεί ο πίνακας  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$  της  $f$  ως προς τις κανονικές βάσεις  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{C}$  των  $\mathbb{R}^3$  και  $\mathbb{R}^4$  αντίστοιχα.

(2) Να βρεθούν βάσεις  $\mathcal{B}'$  και  $\mathcal{C}'$  των  $\mathbb{R}^3$  και  $\mathbb{R}^4$  αντίστοιχα έτσι ώστε ο πίνακας  $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)$  της  $f$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}'$  και  $\mathcal{C}'$  να είναι ο πίνακας:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Λύση.** Θεωρούμε την κανονική βάση

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

και το σύνολο διανυσμάτων

$$\vec{y}_1 = (1, 2, 0, -4), \quad \vec{e}_2 = (2, 0, -1, -3), \quad \vec{y}_3 = (0, 0, 0, 0)$$

Από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_1) = (1, 2, 0, -4), \quad f(\vec{e}_2) = (2, 0, -1, -3), \quad f(\vec{e}_3) = (0, 0, 0, 0)$$

Τότε:

$$\text{Im}(f) = \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3) \rangle = \langle (1, 2, 0, -4), (2, 0, -1, -3), (0, 0, 0, 0) \rangle = \langle (1, 2, 0, -4), (2, 0, -1, -3) \rangle$$

Η γραμμική απεικόνιση  $f$  είναι η εξής:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3) = \\ &= x(1, 2, 0, -4) + y(2, 0, -1, -3) + z(0, 0, 0, 0) = (x + 2y, 2x, -y, -4x - 3y) \end{aligned}$$

Άρα

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z) = (x + 2y, 2x, -y, -4x - 3y)$$

Επειδή

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= (1, 2, 0, -4) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4 \\ f(\vec{e}_2) &= (2, 0, -1, -3) = 2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 3\vec{e}_4 \\ f(\vec{e}_3) &= (0, 0, 0, 0) = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 + 0\vec{e}_4 \end{aligned}$$

όπου

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

είναι η κανονική βάση του  $\mathbb{R}^4$ , έπεται ότι

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+2y, 2x, -y, -4x-3y) = (0, 0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle \vec{e}_3 \rangle \end{aligned}$$

και άρα η κανονική βάση  $\mathcal{B}$  είναι μια βάση του  $\mathbb{R}^3$  η οποία συμπληρώνει τη βάση  $\{\vec{e}_3\}$  του  $\text{Ker}(f)$ . Τότε από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το σύνολο διανυσμάτων  $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)\} = \{\vec{e}'_1 = (1, 2, 0, -4), \vec{e}'_2 = (2, 0, -1, -3)\}$  είναι μια βάση της εικόνας  $\text{Im}(f)$  η οποία συμπληρώνεται σε μια βάση

$$\mathcal{C}' = \{\vec{e}'_1 = (1, 2, 0, -4), \vec{e}'_2 = (2, 0, -1, -3), \vec{e}'_3 = (0, 0, 1, 0), \vec{e}'_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

διότι ο η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Ο πίνακας της  $f$  ως προς το ζυγάρι βάσεων  $\mathcal{B}$  του  $\mathbb{R}^3$  και  $\mathcal{C}'$  του  $\mathbb{R}^4$  είναι τότε ο

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 5.** Έστω  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$  η κανονική βάση του  $\mathbb{R}^4$  και  $\mathcal{B}'$  η βάση

$$\mathcal{B}' = \{\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \vec{\varepsilon}_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{\varepsilon}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\}$$

Έστω  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  η μοναδική γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε:

$$f(\vec{\varepsilon}_1) = 3\vec{\varepsilon}_2, \quad f(\vec{\varepsilon}_2) = 7\vec{\varepsilon}_4, \quad f(\vec{\varepsilon}_3) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3, \quad f(\vec{\varepsilon}_4) = \vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_3$$

Να βρεθεί ο πίνακας  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ .

**Λύση.** Έχουμε την κανονική βάση  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)\}$  του  $\mathbb{R}^4$ . Τότε από την περιγραφή της βάσης  $\mathcal{B}'$  έχουμε:

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4 \\ \vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \\ \vec{\varepsilon}_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{\varepsilon}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0, 1) \\ \vec{\varepsilon}_2 = (1, 3, 0, 0) \\ \vec{\varepsilon}_3 = (3, 1, 0, 0) \\ \vec{\varepsilon}_4 = (1, 1, 1, 1) \end{cases}$$

και άρα

$$\begin{cases} f(\vec{\varepsilon}_1) = 3\vec{\varepsilon}_2 \\ f(\vec{\varepsilon}_2) = 7\vec{\varepsilon}_4 \\ f(\vec{\varepsilon}_3) = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3 \\ f(\vec{\varepsilon}_4) = \vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_3 \end{cases} \implies \begin{cases} f(1, 0, 0, 1) = (3, 9, 0, 0) \\ f(1, 3, 0, 0) = (7, 7, 7, 7) \\ f(3, 1, 0, 0) = (4, 1, 0, 1) \\ f(1, 1, 1, 1) = (-14, -5, 0, 1) \end{cases}$$

Έστω  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ . Τότε

$$(x, y, z, w) = a(1, 0, 0, 1) + b(1, 3, 0, 0) + c(3, 1, 0, 0) + d(1, 1, 1, 1) = (a + b + 3c + d, 3b + c + d, d, a + d)$$

και άρα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} a + b + 3c + d = x \\ \phantom{a} + 3b + c + d = y \\ \phantom{a} + \phantom{b} + \phantom{c} + d = z \\ a + \phantom{b} + \phantom{c} + d = w \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα με τις γνωστές διαδικασίες τότε βρίσκουμε

$$\begin{cases} a = w - z \\ b = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}w \\ c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{3}{8}w \\ d = z \end{cases}$$

Επομένως το τυχαίο διάνυσμα  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$  γράφεται ως εξής:

$$(x, y, z, w) = (w - z)(1, 0, 0, 1) + \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}w\right)(1, 3, 0, 0) + \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{3}{8}w\right)(3, 1, 0, 0) + z(1, 1, 1, 1)$$

Άρα αν εφαρμόσουμε τη γραμμική απεικόνιση  $f$  στη παραπάνω σχέση τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= (w - z)f(1, 0, 0, 1) + \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}w\right)f(1, 3, 0, 0) \\ &+ \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{3}{8}w\right)f(3, 1, 0, 0) + zf(1, 1, 1, 1) \\ &= (w - z)(3, 9, 0, 0) + \left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}w\right)(7, 7, 7, 7) \\ &+ \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z - \frac{3}{8}w\right)(4, 1, 0, 1) + z(-14, -5, 0, 1) \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{5}{8}x + \frac{17}{8}y - \frac{153}{8}z + \frac{19}{8}w, -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{33}{2}z + \frac{19}{2}w, \right. \\ &\quad \left. -\frac{7}{8}x + \frac{21}{8}y - \frac{21}{8}z + \frac{7}{8}w, -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}w\right) \end{aligned}$$

Τότε υπολογίζοντας την  $f$  στην κανονική βάση του  $\mathbb{R}^4$  έχουμε:

$$\begin{cases} f(1, 0, 0, 0) = \left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{8}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{7}{8}\vec{e}_3 - \frac{1}{2}\vec{e}_4 \\ f(0, 1, 0, 0) = \left(\frac{17}{8}, \frac{5}{2}, \frac{21}{8}, \frac{5}{2}\right) = \frac{17}{8}\vec{e}_1 + \frac{5}{2}\vec{e}_2 + \frac{21}{8}\vec{e}_3 + \frac{5}{2}\vec{e}_4 \\ f(0, 0, 1, 0) = \left(-\frac{153}{8}, -\frac{33}{2}, -\frac{21}{8}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{153}{8}\vec{e}_1 - \frac{33}{2}\vec{e}_2 - \frac{21}{8}\vec{e}_3 - \frac{3}{2}\vec{e}_4 \\ f(0, 0, 0, 1) = \left(\frac{19}{8}, \frac{19}{2}, \frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right) = \frac{19}{8}\vec{e}_1 + \frac{19}{2}\vec{e}_2 + \frac{7}{8}\vec{e}_3 + \frac{1}{2}\vec{e}_4 \end{cases}$$

Συνεπώς ο πίνακας  $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$  της  $f$  είναι

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5/8 & 17/8 & -153/8 & 19/8 \\ -1/2 & 5/2 & -33/2 & 19/2 \\ -7/8 & 21/8 & -21/8 & 7/8 \\ -1/2 & 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

**Διαφορετικά:** Μπορούμε να υπολογίσουμε τον ζητούμενο πίνακα  $A := M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$  χωρίς να γνωρίζουμε την  $f$  ως εξής:

Από τις σχέσεις

$$f(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_2) = 7\vec{e}_4, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_4) = \vec{e}_1 - 5\vec{e}_3$$

βλέπουμε άμεσα ότι ο πίνακας της  $f$  στην βάση  $\mathfrak{B}'$  είναι ο:

$$B := M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την θεωρία, οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι όμοιοι και θα συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = B$$

όπου  $P = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}$  είναι ο πίνακας μετάβασης από την  $\mathfrak{B}$  στην  $\mathfrak{B}'$ . Επομένως θα έχουμε:

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1} \quad (*)$$

και το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των  $P$  και  $P^{-1}$ . Επειδή:

$$\mathfrak{B}' = \{\vec{e}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \vec{e}_3 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4\}$$

βλέπουμε άμεσα ότι:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο  $P^{-1}$  μπορεί να υπολογισθεί είτε με την εύρεση του συμπληρωματικού του  $P$  ή ως ο πίνακας μετάβασης από την  $\mathfrak{B}'$  στην  $\mathfrak{B}$ . Τότε ο πίνακας  $A$  προκύπτει από την σχέση (\*).

**Άσκηση 6.** Έστω  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  δύο γραμμικές απεικονίσεις και έστω η βάση του  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 1, 1), \vec{e}_2 = (1, 1, 0), \vec{e}_3 = (1, 0, 0)\}$$

Αν

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(g) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

να βρεθούν οι γραμμικές απεικονίσεις  $f + g$  και  $-3f + 2g$  και  $f \circ g$ .



**Λύση.** Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι  $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f + g) = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) + M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(g)$  και άρα

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f + g) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{cases} (f + g)(\vec{e}_1) = 7\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = 7(1, 1, 1) + 0(1, 1, 0) + 3(1, 0, 0) = (10, 7, 7) \\ (f + g)(\vec{e}_2) = 1\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (1, 1, 1) + (1, 1, 0) + 3(1, 0, 0) = (5, 2, 1) \\ (f + g)(\vec{e}_3) = 1\vec{e}_1 - 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 = (1, 1, 1) - 1(1, 1, 0) + (1, 0, 0) = (1, 0, 1) \end{cases}$$

Έστω  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Τότε το τυχαίο διάνυσμα  $(x, y, z)$  γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης  $\mathfrak{B}$ . Έστω  $\kappa\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + \mu\vec{e}_3 = (x, y, z)$ . Τότε

$$(x, y, z) = (\kappa + \lambda + \mu, \kappa + \lambda, \kappa) \implies \begin{cases} x = \kappa + \lambda + \mu \\ y = \kappa + \lambda \\ z = \kappa \end{cases} \implies \begin{cases} \kappa = z \\ \lambda = y - z \\ \mu = x - y \end{cases}$$

και άρα  $(x, y, z) = z\vec{e}_1 + (y - z)\vec{e}_2 + (x - y)\vec{e}_3$ . Αν εφαρμόσουμε τη γραμμική απεικόνιση  $f + g$  στο διάνυσμα  $(x, y, z)$  τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} (f + g)(x, y, z) &= (f + g)(z\vec{e}_1 + (y - z)\vec{e}_2 + (x - y)\vec{e}_3) \\ &= z(f + g)(\vec{e}_1) + (y - z)(f + g)(\vec{e}_2) + (x - y)(f + g)(\vec{e}_3) \\ &= z(10, 7, 7) + (y - z)(5, 2, 1) + (x - y)(1, 0, 1) \\ &= (x + 4y + 5z, 2y + 5z, x + 6z) \end{aligned}$$

Συνεπώς  $(f + g)(x, y, z) = (x + 4y + 5z, 2y + 5z, x + 6z)$  για κάθε  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Στην συνέχεια θα βρούμε τη γραμμική απεικόνιση  $-3f + 2g$ . Έχουμε:

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(-3f + 2g) = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(-3f) + M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(2g) = -3M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) + 2M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(g) = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{cases} (-3f + 2g)(\vec{e}_1) = 9\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 = 9(1, 1, 1) + 0(1, 1, 0) + 6(1, 0, 0) = (15, 9, 9) \\ (-3f + 2g)(\vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 = -3(1, 1, 1) - 3(1, 1, 0) + (1, 0, 0) = (-5, -6, -3) \\ (-3f + 2g)(\vec{e}_3) = -3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = -3(1, 1, 1) + 3(1, 1, 0) + 2(1, 0, 0) = (2, 0, -3) \end{cases}$$

Έστω  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Δείξαμε παραπάνω ότι το τυχαίο διάνυσμα  $(x, y, z)$  γράφεται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης  $\mathfrak{B}$  ως εξής:  $(x, y, z) = z\vec{e}_1 + (y - z)\vec{e}_2 + (x - y)\vec{e}_3$ . Τότε αν εφαρμόσουμε τη γραμμική απεικόνιση  $-3f + 2g$  στο τυχαίο διάνυσμα  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  έχουμε:

$$\begin{aligned} (-3f + 2g)(x, y, z) &= (-3f + 2g)(z\vec{e}_1 + (y - z)\vec{e}_2 + (x - y)\vec{e}_3) \\ &= z(-3f + 2g)(\vec{e}_1) + (y - z)(-3f + 2g)(\vec{e}_2) + (x - y)(-3f + 2g)(\vec{e}_3) \\ &= z(15, 9, 9) + (y - z)(-5, -6, -3) + (x - y)(2, 0, -3) \\ &= (2x - 7y + 20z, -6y + 15z, -3x + 12z) \end{aligned}$$

Συνεπώς  $(-3f + 2g)(x, y, z) = (2x - 7y + 20z, -6y + 15z, -3x + 12z)$  για κάθε  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Τέλος, από την θεωρία γνωρίζουμε ότι  $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f \circ g) = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(g)$ . Επομένως:

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{cases} (f \circ g)(\vec{e}_1) = 9\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = 9(1, 1, 1) - 3(1, 1, 0) + 0(1, 0, 0) = (6, 6, 9) \\ (f \circ g)(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = 2(1, 1, 1) - 2(1, 1, 0) + 0(1, 0, 0) = (0, 0, 2) \\ (f \circ g)(\vec{e}_3) = 1\vec{e}_1 - 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = 1(1, 1, 1) - 1(1, 1, 0) + 0(1, 0, 0) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

και

$$(f \circ g)(x, y, z) = (f \circ g)(z\vec{e}_1 + (y-z)\vec{e}_2 + (x-y)\vec{e}_3) = z(f \circ g)(\vec{e}_1) + (y-z)(f \circ g)(\vec{e}_2) + (x-y)(f \circ g)(\vec{e}_3) =$$

$$= z(6, 6, 9) + (x-y)(0, 0, 2) + (y-z)(0, 0, 1) = (6z, 6z, 9z + 2x - 2y + y - z) = (6z, 6z, 2x - y + 8z)$$

Άρα

$$f \circ g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (6z, 6z, 2x - y + 8z)$$

**Β' Τρόπος:** Επειδή γνωρίζουμε τον πίνακα της  $f$  στη βάση  $\mathfrak{B}$  και τον πίνακα της  $g$  στη βάση  $\mathfrak{B}$  τότε μπορούμε να βρούμε τον τύπο της  $f$  και τον τύπο της  $g$  αντίστοιχα. Έχουμε:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = f(1, 1, 1) = \vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = (1, 1, 1) \\ f(\vec{e}_2) = f(1, 1, 0) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (3, 2, 1) \\ f(\vec{e}_3) = f(1, 0, 0) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Συμπεώς αν εφαρμόσουμε την  $f$  στο τυχαίο διάνυσμα  $(x, y, z) = z\vec{e}_1 + (y-z)\vec{e}_2 + (x-y)\vec{e}_3$  του  $\mathbb{R}^3$  τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(z\vec{e}_1 + (y-z)\vec{e}_2 + (x-y)\vec{e}_3) \\ &= zf(\vec{e}_1) + (y-z)f(\vec{e}_2) + (x-y)f(\vec{e}_3) \\ &= z(1, 1, 1) + (y-z)(3, 2, 1) + (x-y)(0, 0, 1) \\ &= (3y - 2z, 2y - z, x) \end{aligned}$$

Συμπεώς  $f(x, y, z) = (3y - 2z, 2y - z, x)$  για κάθε  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Δουλεύοντας παρόμοια βρίσκουμε ότι  $g(x, y, z) = (x + y + 7z, 6z, 6z)$  για κάθε  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Τότε γνωρίζοντας τους τύπους της  $f$  και της  $g$  εύκολα υπολογίζουμε τους τύπους της  $f + g$ , της  $-3f + 2g$  και της  $f \circ g$ .

**Άσκηση 7.** Έστω  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Αν  $r(A) = 1$ , να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες  $B = M_{m \times 1}(\mathbb{K})$  και  $C \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$  έτσι ώστε:

$$A = B \cdot C \quad \text{και} \quad r(A) = 1 = r(C)$$

**Λύση.** Επειδή  $r(A) = 1$ , υπάρχει ένας αντιστρέψιμος  $m \times m$  πίνακας  $Q$  και ένας αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας  $P$  έτσι ώστε:

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \implies A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Έστω

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} & \cdots & p'_{1n} \\ p'_{21} & p'_{22} & \cdots & p'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p'_{n1} & p'_{n2} & \cdots & p'_{nn} \end{pmatrix}$$

Θέτουμε:

$$B = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \vdots \\ q_{m1} \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{K}) \quad \text{και} \quad C = (p'_{11} \ p'_{12} \ \cdots \ p'_{1n}) \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

Ο πίνακας  $B$  δεν είναι ο μηδενικός διότι είναι η πρώτη στήλη του αντιστρέψιμου πίνακα  $Q$  και ο πίνακας  $C$  δεν είναι ο μηδενικός διότι είναι η πρώτη γραμμή του αντιστρέψιμου πίνακα  $P^{-1}$ . Επομένως  $r(A) = 1 = r(C)$ . Εύκολα επαληθεύουμε ότι:

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \vdots \\ q_{m1} \end{pmatrix} \cdot (p'_{11} \ p'_{12} \ \cdots \ p'_{1n}) = \begin{pmatrix} q_{11}p'_{11} & q_{11}p'_{12} & \cdots & q_{11}p'_{1n} \\ q_{21}p'_{11} & q_{21}p'_{12} & \cdots & q_{21}p'_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1}p'_{11} & q_{m1}p'_{12} & \cdots & q_{m1}p'_{1n} \end{pmatrix} = B \cdot C$$

**Άσκηση 8.** Έστω  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  μια γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πίνακας στην κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$  είναι ο ακόλουθος

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- (1) Να βρεθεί το διάνυσμα  $f(x, y, z)$ , για κάθε  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- (2) Να βρεθεί ο πίνακας  $B$  της  $f$  στη βάση  $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, -2), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (2, 0, 1)\}$ .
- (3) Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  έτσι ώστε  $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ .
- (4) Να υπολογισθεί ο πίνακας  $A^n, \forall n \geq 1$ .

**Λύση.** (1) Έστω  $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$  η κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$ . Τότε από τον πίνακα  $A$  έχουμε:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (1, 0, -2) \\ f(\vec{e}_2) = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = (0, 0, 0) \\ f(\vec{e}_3) = -2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 = (-2, 0, 4) \end{cases}$$

Επομένως ο τύπος της  $f$  είναι

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \\ &= xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3) \\ &= x(1, 0, -2) + y(0, 0, 0) + z(-2, 0, 4) \\ &= (x - 2z, 0, -2x + 4z) \end{aligned}$$

δηλαδή  $f(x, y, z) = (x - 2z, 0, -2x + 4z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

- (2) Αφού θέλουμε να βρούμε τον πίνακα της  $f$  στη βάση  $\mathfrak{B}$  θα υπολογίσουμε την  $f$  στα διανύσματα της  $\mathfrak{B}$  και στην συνέχεια θα τα εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της  $\mathfrak{B}$ . Έχουμε:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = f(1, 0, -2) = (5, 0, -10) = 5\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) = f(0, 1, 0) = (0, 0, 0) = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_3) = f(2, 0, 1) = (0, 0, 0) = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \end{cases}$$

Ήρα ο πίνακας της  $f$  στη βάση  $\mathfrak{B}$  είναι

$$B = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (3) Ο αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  που ψάχνουμε είναι ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση  $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$  στη βάση  $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, -2), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (2, 0, 1)\}$ . Αυτό σημαίνει ότι γράφουμε τα διανύσματα της  $\mathfrak{B}$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της κανονικής βάσης. Ήρα έχουμε:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = (1, 0, -2) = \vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0) = 0\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 = (2, 0, 1) = 2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases} \implies P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας  $P^{-1}$  είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathfrak{B}$  στην κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$ , δηλαδή τώρα γράφουμε τα διανύσματα της κανονικής βάσης του  $\mathbb{R}^3$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης  $\mathfrak{B}$ . Διαφορετικά απλά υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα του  $P$  με το συνηθισμένο τρόπο. Και στις δύο περιπτώσεις βρίσκουμε ότι

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Επίσης εύκολα επαληθεύουμε τη σχέση:  $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ .

(4) Από την τελευταία σχέση ο πίνακας  $A$  γράφεται ως εξής:  $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$ . Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ &= (P \cdot B \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot B \cdot P^{-1}) \\ &= P \cdot B \cdot P^{-1} P \cdot B \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot B \cdot I_3 \cdot B \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot B^2 \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

και άρα για κάθε  $n \geq 1$  έχουμε:

$$A^n = P \cdot B^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 5^{n-1} & 0 & -2 \cdot 5^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 \cdot 5^{n-1} & 0 & 4 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 9.** Υποθέτουμε ότι ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ως προς τις βάσεις

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \left\{ \vec{e}_1 = (2, 0, 0), \vec{e}_2 = (-3, -1, 0), \vec{e}_3 = \left(0, 2, \frac{1}{2}\right) \right\} \\ \mathcal{C} &= \left\{ \vec{e}'_1 = (1, 0, 0), \vec{e}'_2 = (0, 1, 0), \vec{e}'_3 = (1, 0, 1) \right\} \end{aligned}$$

του  $\mathbb{R}^3$  είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας  $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f)$  της  $f$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{C}$  και  $\mathcal{D}$ , όπου

$$\mathcal{D} = \left\{ \vec{e}'_1 = (1, -1, 0), \vec{e}'_2 = (1, 0, 1), \vec{e}'_3 = (0, 1, -2) \right\}$$

**Λύση.** Επειδή  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ , έπεται ότι

$$f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 = (2, 1, 1)$$

$$f(\vec{e}_2) = 1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = (1, 2, 2)$$

$$f(\vec{e}_3) = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = (1, 0, 2)$$

Έστω  $(x, y, z)$  τυχόν διάνυσμα του  $\mathbb{R}^3$ . Τότε το  $(x, y, z)$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης  $\mathcal{B}$ :

$$(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(2, 0, 0) + b(-3, -1, 0) + c\left(0, 2, \frac{1}{2}\right) = \left(2a - 3b, -b + 2c, \frac{c}{2}\right) \implies$$

$$\implies \begin{cases} 2a - 3b = x \\ -b + 2c = y \\ \frac{c}{2} = z \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{x - 3y + 12z}{2} \\ b = -y + 4z \\ c = 2z \end{cases}$$

Άρα

$$(x, y, z) = \frac{x - 3y + 12z}{2} \vec{e}_1 + (-y + 4z) \vec{e}_2 + 2z \vec{e}_3$$

και επομένως

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f\left(\frac{x - 3y + 12z}{2} \vec{e}_1 + (-y + 4z) \vec{e}_2 + 2z \vec{e}_3\right) = \\ &= \frac{x - 3y + 12z}{2} f(\vec{e}_1) + (-y + 4z) f(\vec{e}_2) + 2z f(\vec{e}_3) = \\ &= \frac{x - 3y + 12z}{2} (2, 1, 1) + (-y + 4z) (1, 2, 2) + 2z (1, 0, 2) = \end{aligned}$$

$$= \left( x - 4y + 18z, \frac{x - 7y + 28z}{2}, \frac{x - 7y + 36z}{2} \right)$$

Επομένως

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = \left( x - 4y + 18z, \frac{x - 7y + 28z}{2}, \frac{x - 7y + 36z}{2} \right)$$

Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα  $B = M_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}(f)$ , θα έχουμε:

$$f(\vec{e}'_1) = f(1, -1, 0) = (5, 4, 4) = 5(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1) = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}'_2) = f(1, 0, 1) = \left( 19, \frac{29}{2}, \frac{37}{2} \right) = 19(1, 0, 0) + \frac{29}{2}(0, 1, 0) + \frac{37}{2}(0, 0, 1) = 19\vec{e}_1 + \frac{29}{2}\vec{e}_2 + \frac{37}{2}\vec{e}_3$$

$$f(\vec{e}'_3) = f(0, 1, -2) = \left( -40, \frac{63}{2}, -\frac{79}{2} \right) = -40(1, 0, 0) - \frac{63}{2}(0, 1, 0) - \frac{79}{2}(0, 0, 1) = -40\vec{e}_1 - \frac{63}{2}\vec{e}_2 - \frac{79}{2}\vec{e}_3$$

Επομένως

$$B = M_{\mathbb{C}}^{\mathbb{D}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 19 & -40 \\ 4 & 29/2 & -63/2 \\ 4 & 37/2 & -79/2 \end{pmatrix}$$

**Παρατήρηση.** Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο  $m \times n$  πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα  $\mathbb{K}$ , τότε γνωρίζουμε ότι οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι ισοδύναμοι, δηλαδή  $A \sim B$ , αν και μόνον αν οι πίνακες  $A$  και  $B$  έχουν την ίδια βαθμίδα:

$$A \sim B \iff \mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B)$$

Έστω ότι  $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B) = r$ . Τότε  $A \sim B$  και επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος  $m \times m$  πίνακας  $Q$  και αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας  $P$  έτσι ώστε  $Q^{-1}AP = B$ .

Γνωρίζουμε, από τη θεωρία πινάκων, ότι για να προσδιορίσουμε του πίνακες  $Q$  και  $P$  εργαζόμαστε ως εξής:

- (1) εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του  $A$  προκύπτει ένας αντιστρέψιμος  $m \times m$  πίνακας  $Q_1$  έτσι ώστε  $Q_1A = \Gamma(A)$  είναι η ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα  $A$ .
- (2) εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες του  $\Gamma(A)$  προκύπτει ένας αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας  $P_1$  έτσι ώστε  $\Gamma(A)P_1 = \mathbf{K}(A)$  είναι η ισχυρά  $\sigma$ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα  $\Gamma(A)$ , δηλαδή η κανονική μορφή του πίνακα  $A$ , η οποία είναι η

$$\left( \begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

Έτσι έχουμε

$$Q_1AP_1 = \left( \begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) \quad (\dagger)$$

- (3) εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του  $B$  προκύπτει ένας αντιστρέψιμος  $m \times m$  πίνακας  $Q_2$  έτσι ώστε  $Q_2B = \Gamma(B)$  είναι η ισχυρά  $\gamma$ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα  $B$ .
- (4) εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες του  $\Gamma(B)$  προκύπτει ένας αντιστρέψιμος  $n \times n$  πίνακας  $P_2$  έτσι ώστε  $\Gamma(B)P_2 = \mathbf{K}(B)$  είναι η ισχυρά  $\sigma$ -κλιμακωτή μορφή του πίνακα  $\Gamma(B)$ , δηλαδή η κανονική μορφή του πίνακα  $A$ , η οποία είναι η

$$\left( \begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

Έτσι έχουμε

$$Q_2BP_2 = \left( \begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) \quad (\dagger\dagger)$$

- (5) Από τις σχέσεις  $(\dagger)$  και  $(\dagger\dagger)$  έπεται ότι:

$$Q_1AP_1 = \left( \begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) = Q_2BP_2 \implies (Q_2^{-1}Q_1)A(P_1P_2^{-1}) = B$$

- (6) Θέτοντας

$$Q = Q_2^{-1}Q_1 \quad \text{και} \quad P = P_1P_2^{-1}$$

αποκτούμε έναν αντιστρέψιμο  $m \times m$  πίνακα  $Q$  και έναν αντιστρέψιμο  $n \times n$  πίνακα  $P$  έτσι ώστε

$$Q^{-1}AP = B$$

Στις επόμενες ασκήσεις αναλύουμε έναν διαφορετικό τρόπο εύρεσης αντιστρέψιμων πινάκων  $Q$  και  $P$  έτσι ώστε  $Q^{-1}AP = B$ , με χρήση γραμμικών απεικονίσεων.

**Άσκηση 10.** Να βρεθεί η (μοναδική) γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

της οποίας ο πίνακας ως προς τις βάσεις

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (0, 1, 1), \vec{e}_2 = (1, 0, 1), \vec{e}_3 = (1, 1, 0)\}$$

και

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}'_1 = (1, 0), \vec{e}'_2 = (0, 1)\}$$

των  $\mathbb{R}^3$  και  $\mathbb{R}^2$  αντίστοιχα, είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Ακολουθώντας:

- (1) Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα  $\text{Ker}(f)$  της  $f$  η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση  $\mathcal{B}'$  του  $\mathbb{R}^3$ .
- (2) Να βρεθεί μια βάση της εικόνας  $\text{Im}(f)$  της  $f$  η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση  $\mathcal{C}'$  του  $\mathbb{R}^2$ .
- (3) Να βρεθεί ο πίνακας  $B$  της  $f$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}'$  και  $\mathcal{C}'$ .
- (4) Να βρεθεί αντιστρέψιμος  $3 \times 3$  πίνακας  $Q$  και αντιστρέψιμος  $2 \times 2$  πίνακας  $P$  έτσι ώστε:

$$Q^{-1}AP = B$$

**Λύση.** Επειδή  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ , θα έχουμε:

$$f(\vec{e}_1) = 1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = (1, 0) + 2(0, 1) = (1, 2)$$

$$f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 = 2(1, 0) + (0, 1) = (2, 1)$$

$$f(\vec{e}_3) = 3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 = 3(1, 0) + 7(0, 1) = (3, 7)$$

Έστω  $(x, y, z)$  τυχόν διάνυσμα του  $\mathbb{R}^3$ . Τότε το  $(x, y, z)$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης  $\mathcal{B}$ :

$$(x, y, z) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(0, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 0) = (b + c, a + c, a + b) \implies$$

$$\implies \begin{cases} b + c = x \\ a + c = y \\ a + b = z \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{-x + y + z}{2} \\ b = \frac{x - y + z}{2} \\ c = \frac{x + y - z}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$(x, y, z) = \frac{-x + y + z}{2} \vec{e}_1 + \frac{x - y + z}{2} \vec{e}_2 + \frac{x + y - z}{2} \vec{e}_3$$

και τότε:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f\left(\frac{-x + y + z}{2} \vec{e}_1 + \frac{x - y + z}{2} \vec{e}_2 + \frac{x + y - z}{2} \vec{e}_3\right) = \\ &= \frac{-x + y + z}{2} f(\vec{e}_1) + \frac{x - y + z}{2} f(\vec{e}_2) + \frac{x + y - z}{2} f(\vec{e}_3) = \\ &= \frac{-x + y + z}{2} (1, 2) + \frac{x - y + z}{2} (2, 1) + \frac{x + y - z}{2} (3, 7) = \\ &= (2x + y, 3x + 4y - 2z) \end{aligned}$$

Επομένως:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (2x + y, 3x + 4y - 2z)$$

(1) έστω  $(x, y, z) \in \text{Ker}(f)$ . Τότε

$$f(x, y, z) = (0, 0) \implies (2x+y, 3x+4y-2z) = (0, 0) \implies \begin{cases} 2x+y=0 \\ 3x+4y-2z=0 \end{cases} \implies \begin{cases} y=-2x \\ z=-\frac{5}{2}x \end{cases}$$

$$\implies (x, y, z) = \left(x, -2x, -\frac{5}{2}x\right) = x \left(1, -2, -\frac{5}{2}\right)$$

Επομένως

$$\text{Ker}(f) = \left\langle \left(1, -2, -\frac{5}{2}\right) \right\rangle$$

Τότε το μονοσύνολο  $\left\{\left(1, -2, -\frac{5}{2}\right)\right\}$  είναι μια βάση του  $\text{Ker}(f)$  την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση  $\mathcal{B}'$  του  $\mathbb{R}^3$  ως εξής

$$\mathcal{B}' = \left\{ \vec{e}'_1 = (0, 1, 0), \vec{e}'_2 = (0, 0, 1), \vec{e}'_3 = \left(1, -2, -\frac{5}{2}\right) \right\}$$

Το σύνολο  $\mathcal{B}'$  είναι βάση του  $\mathbb{R}^3$  διότι η οριζούσα του πίνακα των συντελεστών των διανυσμάτων του συνόλου  $\mathcal{B}'$  είναι

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(2) Από τη θεωρία (ή με εύκολο υπολογισμό) γνωρίζουμε ότι το σύνολο

$$\left\{ \vec{e}'_1 = f(\vec{e}'_1) = f(0, 1, 0) = (1, 4), \vec{e}'_2 = f(\vec{e}'_2) = f(0, 0, 1) = (0, -2) \right\}$$

είναι μια βάση της εικόνας  $\text{Im}(f)$ . Προφανώς όμως  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$  διότι  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}(f) = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ . Άρα το σύνολο

$$\mathcal{C}' = \left\{ \vec{e}'_1 = (1, 4), \vec{e}'_2 = (0, -2) \right\}$$

είναι μια βάση του  $\mathbb{R}^2$ .

(3) Από τη θεωρία (ή με εύκολο υπολογισμό) έχουμε ότι

$$B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) Ο αντιστρέψιμος  $2 \times 2$  πίνακας  $Q$  και ο αντιστρέψιμος  $3 \times 3$  πίνακας  $P$  έτσι ώστε  $Q^{-1}AP = B$  είναι ο πίνακας μετάβασης  $Q = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}$  και  $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  αντίστοιχα.

Για τον πίνακα  $P$ , θα έχουμε:

$$\vec{e}'_1 = (0, 1, 0) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(0, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 0) = (b+c, a+c, a+b) \implies$$

$$\implies \begin{cases} b+c=0 \\ a+c=1 \\ a+b=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3$$

$$\vec{e}'_2 = (0, 0, 1) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(0, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 0) = (b+c, a+c, a+b) \implies$$

$$\implies \begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3$$

$$\vec{e}'_3 = \left(1, -2, -\frac{5}{2}\right) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = a(0, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 0) = (b + c, a + c, a + b) \implies$$

$$\implies \begin{cases} b + c = 1 \\ a + c = -2 \\ a + b = -\frac{5}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} a = -\frac{11}{4} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$\vec{e}'_1 = -\frac{11}{4}\vec{e}_1 + \frac{1}{4}\vec{e}_2 + \frac{3}{4}\vec{e}_3$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$Q = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -11/4 \\ -1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Για τον πίνακα  $P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$ , θα έχουμε:

$$\vec{e}'_1 = (1, 4) = 1(1, 0) + 4(0, 1) = 1\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

$$\vec{e}'_2 = (0, -2) = 0(1, 0) - 2(0, 1) = 0\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$$

πό τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

**Άσκηση 11.** Έστω  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{F}$  δύο διανυσματικοί χώροι διάστασης 3 υπεράνω ενός σώματος  $\mathbb{K}$  και έστω  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  μια βάση του  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$  μια βάση του  $\mathcal{F}$ . Υποθέτουμε ότι ο πίνακας της  $f$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{C}$  είναι ο

$$A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda^2 & \mu^2 \end{pmatrix}$$

όπου  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Να βρεθεί ο πίνακας  $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}(f)$  της  $f$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}'$  και  $\mathcal{C}$ , όπου

$$\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2 + (\lambda + 1)\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = \vec{e}_3\}$$

Τέλος, αν  $\lambda = \mu = 0$ , να βρεθεί μια βάση  $\mathcal{D}$  του  $\mathcal{E}$  και μια βάση  $\mathcal{D}'$  του  $\mathcal{F}$  έτσι ώστε

$$M_{\mathcal{D}'}^{\mathcal{D}}(f) = \left( \begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

όπου  $r = \mathbf{r}(f)$ .



**Λύση.** Επειδή

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \quad \text{και} \quad B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}(f)$$

έπεται ότι οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι ισοδύναμοι διότι είναι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης ως προς διαφορετικά ζεύγη βάσεων. Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος  $3 \times 3$  πίνακας και αντιστρέψιμος  $3 \times 3$  πίνακας  $P$  έτσι ώστε

$$Q^{-1}AP = B$$

Ο πίνακας  $P$  είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathcal{B}$  στη βάση  $\mathcal{B}'$  και ο πίνακας  $Q$  είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathcal{C}$  στη βάση  $\mathcal{C}$ . Ο τελευταίος προφανώς είναι ο ταυτοτικός πίνακας  $I_3$  και θα έχουμε:

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \quad \text{και} \quad Q = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = I_3$$

Για την εύρεση του πίνακα  $P$  θα έχουμε:

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{e}'_2 = \vec{e}_2 + (\lambda + 1)\vec{e}_3, \quad \vec{e}'_3 = \vec{e}_3$$

και επομένως:

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$B = AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda^2 & \mu^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \lambda + 1 & 1 \\ \lambda + \mu + 1 & \lambda + \lambda\mu + \mu & \mu \\ 1 + \lambda^2 + \mu^2 & \lambda^2 + \mu^2\lambda + \mu^2 + 1 & \mu^2 \end{pmatrix}$$

Έστω τώρα ότι  $\lambda = \mu = 0$ . Τότε

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(A) = 2$$

Από τη μορφή του πίνακα  $A$  θα έχουμε

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1$$

Επομένως, για κάθε  $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ , θα έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1f(\vec{e}_1) + x_2f(\vec{e}_2) + x_3f(\vec{e}_3) = \\ &= x_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + x_2\vec{e}_1 + x_3\vec{e}_1 = (x_1 + x_2 + x_3)\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2 + x_1\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Έστω  $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in \text{Ker}(f)$ . Τότε  $f(\vec{x}) = \vec{0}$  και επομένως

$$(x_1 + x_2 + x_3)\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2 + x_1\vec{e}_3 = \vec{0} \implies \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

Άρα  $\vec{x} = x_2\vec{e}_2 - x_2\vec{e}_3 = x_2(\vec{e}_2 - \vec{e}_3)$ . Αυτό σημαίνει προφανώς ότι:

$$\text{Ker}(f) = \langle \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \rangle$$

Συμπληρώνουμε τη βάση  $\{\vec{e}_2 - \vec{e}_3\}$  του πυρήνα της  $f$  σε μια βάση του  $\mathcal{E}$ : θεωρούμε το σύνολο  $\mathcal{D} = \{\vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2, \vec{e}'_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3\}$ , το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο διότι:

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \vec{0} \implies \lambda_1\vec{e}_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)\vec{e}_2 - \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι το σύνολο  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  μια βάση του  $\mathcal{E}$ . Επειδή  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 3$ , έπεται ότι το σύνολο  $\mathcal{D}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{E}$ .

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι το σύνολο  $\{f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1\}$  είναι μια βάση της εικόνας  $\text{Im}(f)$  της  $f$ , την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση  $\mathcal{D}'$  του  $\mathcal{F}$ : θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{D}' = \{\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1, \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$$

το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο διότι:

$$\lambda_1\vec{e}'_1 + \lambda_2\vec{e}'_2 + \lambda_3\vec{e}'_3 = \vec{0} \implies \lambda_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \lambda_2\vec{e}_1 + \lambda_3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{0} \implies$$

$$\implies (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\vec{e}_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)\vec{e}_2 + \lambda_1\vec{e}_3 = \vec{0} \implies \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι το σύνολο  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  μια βάση του  $\mathcal{F}$ . Επειδή  $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = 3$ , έπεται ότι το σύνολο  $\mathcal{D}'$  είναι μια βάση του  $\mathcal{F}$ .

Για να προσδιορίσουμε τον πίνακα  $M_{\mathcal{D}'}^{\mathcal{D}'}(f)$  της  $f$  στις βάσεις  $\mathcal{D}$  του  $\mathcal{E}$  και  $\mathcal{D}'$  του  $\mathcal{F}$ , θα έχουμε:

$$f(\vec{e}'_1) = f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{e}'_1 = 1\vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2 + 0\vec{e}'_3$$

$$f(\vec{e}'_2) = f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 = \vec{e}'_2 = 0\vec{e}'_1 + 1\vec{e}'_2 + 0\vec{e}'_3$$

$$f(\vec{e}'_3) = f(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \vec{0} = 0\vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2 + 0\vec{e}'_3$$

Επομένως:

$$M_{\mathcal{D}'}^{\mathcal{D}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} I_2 & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$$

όπου  $2 = \mathbf{r}(f)$ .

**Άσκηση 12.** Έστω η απεικόνιση  $f : \mathbb{R}_3[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ ,  $f(P(t)) = P(t)' - P(t)''$ .

- (1) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γραμμική.
- (2) Να βρείτε μια βάση του πυρήνα  $\text{Ker } f$  και μια βάση της εικόνας  $\text{Im } f$ .
- (3) Να βρεθεί ο πίνακας  $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}}(f)$ , όπου  $\mathfrak{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$  είναι η κανονική βάση του  $\mathbb{R}_3[t]$  και  $\mathfrak{C} = \{1, t, t^2\}$  είναι η κανονική βάση του  $\mathbb{R}_2[t]$ .
- (4) Να βρεθεί ο πίνακας  $M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{C}'}(f)$  όπου  $\mathfrak{B}' = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$  είναι βάση του  $\mathbb{R}_3[t]$  και  $\mathfrak{C}' = \{1, 2t-1, -1-4t+3t^2\}$  είναι βάση του  $\mathbb{R}_2[t]$ .
- (5) Να προσδιοριστούν αντιστρέψιμοι πίνακες  $P, Q$  έτσι ώστε:  $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$ .

**Λύση.** (1) Έστω  $P(t), Q(t) \in \mathbb{R}_3[t]$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Τότε

$$\begin{aligned} f(P(t) + Q(t)) &= (P(t) + Q(t))' - (P(t) + Q(t))'' \\ &= P(t)' + Q(t)' - P(t)'' - Q(t)'' \\ &= (P(t)' - P(t)'' ) + (Q(t)' - Q(t)'' ) \\ &= f(P(t)) + f(Q(t)) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f(\lambda P(t)) &= (\lambda P(t))' - (\lambda P(t))'' \\ &= \lambda P(t)' - \lambda P(t)'' \\ &= \lambda(P(t)' - P(t)'' ) \\ &= \lambda f(P(t)) \end{aligned}$$

ρα η απεικόνιση  $f$  είναι γραμμική.

- (2) Έστω  $P(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 \in \mathbb{R}_3[t]$ . Τότε:  $P(t) \in \text{Ker } f$  αν και μόνον αν:

$$f(P(t)) = 0 \iff P(t)' - P(t)'' = 0 \quad (*)$$

Έχουμε  $P(t)' = \beta + 2\gamma t + 3\delta t^2$  και  $P(t)'' = 2\gamma + 6\delta t$ . Τότε:

$$\begin{aligned} P(t)' - P(t)'' = 0 &\implies (\beta + 2\gamma t + 3\delta t^2) - (2\gamma + 6\delta t) = 0 \\ &\implies (\beta - 2\gamma) + (2\gamma - 6\delta)t + 3\delta t^2 = 0 + 0t + 0t^2 \\ &\implies \beta = \gamma = \delta = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς ο πυρήνας της  $f$  είναι

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{P(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid f(P(t)) = 0\} \\ &= \{P(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid \beta = \gamma = \delta = 0\} \\ &= \{P(t) = a \in \mathbb{R}_3[t] \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a \cdot 1 \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle 1 \rangle \end{aligned}$$

Ύρα ο πυρήνας  $\text{Ker } f$  της  $f$  αποτελείται από όλα τα σταθερά πολυώνυμα και βάση του  $\text{Ker } f$  είναι το σταθερό πολυώνυμο 1. Στην συνέχεια θα βρούμε μια βάση της εικόνας  $\text{Im } f$  της  $f$ . Από την εξίσωση των διαστάσεων έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_3[t] = \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } f + \dim_{\mathbb{R}} \text{Im } f \implies \dim_{\mathbb{R}} \text{Im } f = 4 - 1 = 3$$

και  $\text{Im } f$  υπόχωρος του  $\mathbb{R}_2[t]$ . Τότε  $\text{Im } f = \mathbb{R}_2[t]$  αφού  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[t] = 3$ . Επομένως μια βάση της εικόνας  $\text{Im } f$  της  $f$  είναι η κανονική βάση του  $\mathbb{R}_2[t]$ , δηλαδή το σύνολο  $\{1, t, t^2\}$ . Διαφορετικά:

$$\mathbb{R}_3[t] = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle \implies \text{Im } f = f(\mathbb{R}_3[t]) = \langle f(1), f(t), f(t^2), f(t^3) \rangle = \langle 1, 2t - 2, 3t^2 - 6t \rangle$$

Ύρα τα παραπάνω διανύσματα αποτελούν βάση της  $\text{Im } f$  της  $f$  διότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επίσης αφού  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } f = 3$  και έχουμε βρει τρία διανύσματα που παράγουν τον χώρο τότε από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι αποτελούν βάση.

(3) Έχουμε:

$$\begin{cases} f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ f(t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ f(t^2) = 2t - 2 = -2 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ f(t^3) = 3t^2 - 6t = 0 \cdot 1 - 6 \cdot t + 3 \cdot t^2 \end{cases} \implies A = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) Έχουμε:

$$\begin{cases} f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (2t - 1) + 0 \cdot (-1 - 4t + 3t^2) \\ f(1+t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (2t - 1) + 0 \cdot (-1 - 4t + 3t^2) \\ f(1+t+t^2) = -1 + 2t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (2t - 1) + 0 \cdot (-1 - 4t + 3t^2) \\ f(1+t+t^2+t^3) = -1 - 4t + 3t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (2t - 1) + 1 \cdot (-1 - 4t + 3t^2) \end{cases}$$

και άρα ο πίνακας  $M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{C}'}(f)$  είναι

$$B = M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) Οι πίνακες  $A$  και  $B$  που βρήκαμε παραπάνω είναι ισοδύναμοι διότι είναι οι πίνακες της ίδιας γραμμικής απεικόνισης  $f$  σε διαφορετικά ζεύγη βάσεων. Επομένως από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $P, Q$  έτσι ώστε:  $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$ . Ο πίνακας  $P$  είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathfrak{B}$  στη βάση  $\mathfrak{B}'$  ενώ ο πίνακας  $Q$  είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathfrak{C}$  στη βάση  $\mathfrak{C}'$ . Έχουμε:

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ 1+t = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ 1+t+t^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ 1+t^2+t^3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 1 \cdot t^3 \end{cases} \implies P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ 2t - 1 = -1 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 \\ -1 - 4t + 3t^2 = -1 \cdot 1 - 4 \cdot t + 3 \cdot t^2 \end{cases} \implies Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας  $Q^{-1}$  είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathcal{C}'$  στη βάση  $\mathcal{C}$ . Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε απλά τον αντίστροφο του πίνακα  $Q$ . Τότε

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Συνεπώς βρήκαμε αντιστρέψιμους πίνακες  $P, Q$  έτσι ώστε:  $Q^{-1} \cdot A \cdot P = B$ .

**Άσκηση 13.** Θεωρούμε τους πίνακες πραγματικών αριθμών

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί αν οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι ισοδύναμοι. Αν οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι ισοδύναμοι, να βρεθούν αντιστρέψιμοι  $3 \times 3$  πίνακες  $Q$  και  $P$  έτσι ώστε:  $Q^{-1}AP = B$ .

**Λύση.** Γνωρίζουμε ότι δύο  $m \times n$  πίνακες είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν έχουν την ίδια βαθμίδα. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η βαθμίδα ενός πίνακα είναι ίση με τη βαθμίδα της επαγόμενης γραμμικής απεικόνισης. Με αυτό το σκεπτικό θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$f_A: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3, \quad f_A(X) = AX \quad \text{και} \quad f_B: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3, \quad f_B(X) = BX$$

Θα υπολογίσουμε τις βαθμίδες των  $f_A$  και  $f_B$ .

Έστω  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f_A)$ , δηλαδή  $f_A(X) = 0$  και επομένως:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 2x + z \\ -3x - 2y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} z = -2x \\ x = -2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \begin{cases} z = 4y \\ x = -2y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα  $\text{Ker}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 4y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$ . Επομένως το μονο-

σύνολο  $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  είναι μια βάση του πυρήνα της  $f_A$  και άρα  $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f_A) = 1$ . Από την εξίσωση διαστάσεων

προκύπτει τότε ότι  $\mathbf{r}(f_A) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f_A) = 3 - 1 = 2$ . Επομένως:

$$\mathbf{r}(A) = 2$$

Έστω  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f_B)$ , δηλαδή  $f_B(X) = 0$  και επομένως:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x - y + z \\ 3x - y + 3z \\ x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα  $\text{Ker}(f_B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ . Επομένως το μονο-

σύνολο  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  είναι μια βάση του πυρήνα της  $f_B$  και άρα  $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f_B) = 1$ . Από την εξίσωση διαστάσεων

προκύπτει τότε ότι  $\mathbf{r}(f_B) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f_B) = 3 - 1 = 2$ . Επομένως:

$$\mathbf{r}(B) = 2$$

Άρα  $\mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(B)$  και επομένως οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι ισοδύναμοι.

Για να προσδιορίσουμε αντιστρέψιμους πίνακες  $Q$  και  $P$  έτσι ώστε:  $Q^{-1}AP = B$ , εργαζόμαστε ως εξής:

(1) Επειδή  $\mathbf{r}(A) = 2$ , ο πίνακας  $A$  είναι ισοδύναμος με τον  $\begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$ , και άρα υπάρχουν αντιστρέψιμοι

$$\text{πίνακες } Q_1 \text{ και } P_1 \text{ έτσι ώστε } Q_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Οι πίνακες  $Q_1$  και  $P_1$  προκύπτουν ως εξής: Έστω  $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$  η κανονική βάση του  $\mathbb{R}_3$ . Βρίσκουμε στη συνέχεια μια βάση του πυρήνα  $\text{Ker}(f_A)$  η οποία, επειδή  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f_A) = 1$ , θα είναι της μορφής  $\{E'_3\}$ . Συμπληρώνουμε τη βάση  $\{E'_3\}$  του  $\text{Ker}(f_A)$  σε μια βάση  $\mathcal{B}' = \{E'_1, E'_2, E'_3\}$  του  $\mathbb{R}_3$ . Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο  $\{F_1 = f_A(E'_1), F_2 = f_A(E'_2)\}$  είναι μια βάση της  $\text{Im}(f_A)$ , την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση  $\mathcal{C} = \{F_1, F_2, F_3\}$  του  $\mathbb{R}_3$ . Τότε:

$$P_1 = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}, \quad \text{και} \quad Q_1 = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$$

όπου  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$  είναι η κανονική βάση του  $\mathbb{R}_3$ .

(2) Επειδή  $\mathbf{r}(B) = 2$ , ο πίνακας  $B$  είναι ισοδύναμος με τον  $\begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$ , και άρα υπάρχουν αντιστρέψιμοι

$$\text{πίνακες } Q_2 \text{ και } P_2 \text{ έτσι ώστε } Q_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Οι πίνακες  $Q_2$  και  $P_2$  προκύπτουν ως εξής: Έστω  $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$  η κανονική βάση του  $\mathbb{R}_3$ . Βρίσκουμε στη συνέχεια μια βάση του πυρήνα  $\text{Ker}(f_B)$  η οποία, επειδή  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f_B) = 1$ , θα είναι της μορφής  $\{E''_3\}$ . Συμπληρώνουμε τη βάση  $\{E''_3\}$  του  $\text{Ker}(f_B)$  σε μια βάση  $\mathcal{B}'' = \{E''_1, E''_2, E''_3\}$  του  $\mathbb{R}_3$ . Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο  $\{F''_1 = f_B(E''_1), F''_2 = f_B(E''_2)\}$  είναι μια βάση της  $\text{Im}(f_B)$ , την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση  $\mathcal{C}'' = \{F''_1, F''_2, F''_3\}$  του  $\mathbb{R}_3$ . Τότε:

$$P_2 = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}, \quad \text{και} \quad Q_2 = M_{\mathcal{C}''}^{\mathcal{C}''}$$

όπου  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$  είναι η κανονική βάση του  $\mathbb{R}_3$ .

(3) Από τα μέρη (1) και (2), προκύπτει ότι:

$$Q_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix} = Q_2^{-1}BP_2 \implies Q_2Q_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B \implies (Q_1Q_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1}) = B$$

Άρα οι ζητούμενοι πίνακες  $Q$  και  $P$  είναι οι πίνακες:

$$Q = Q_1Q_2^{-1} \quad \text{και} \quad P = P_1P_2^{-1}$$

Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο για να προσδιορίσουμε αντιστρέψιμους πίνακες  $Q$  και  $P$  έτσι ώστε:  $Q^{-1}AP = B$ .

• Θα κατασκευάσουμε μια βάση του  $\mathbb{R}_3$  συμπληρώνοντας τη βάση  $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  του πυρήνα  $\text{Ker}(f_A)$  σε μια βάση

$$\mathcal{B}' = \left\{ E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E'_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

του  $\mathbb{R}_3$ . Το παραπάνω σύνολο είναι βάση του  $\mathbb{R}_3$  διότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο  $\{F'_1 = f_A(E'_1), F'_2 = f_A(E'_2)\}$  είναι μια βάση της  $\text{Im}(f_A)$  της  $f_A$ . Έχουμε:

$$F'_1 = f_A(E'_1) = AE'_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$F'_2 = f_A(E'_2) = AE'_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Συμπληρώνουμε τη βάση  $\{F'_1, F'_2\}$  της  $\text{Im}(f_A)$  σε μια βάση

$$\mathcal{C}' = \left\{ F'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, F'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, F'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

του  $\mathbb{R}_3$ . Το παραπάνω σύνολο είναι βάση του  $\mathbb{R}_3$  διότι

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση  $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$  του  $\mathbb{R}_3$  στη βάση  $\mathcal{B}'$  είναι τότε ο πίνακας:

$$P_1 = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση  $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3\}$  του  $\mathbb{R}_3$  στη βάση  $\mathcal{C}'$  είναι τότε ο πίνακας:

$$Q_1 = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$Q_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad (\dagger)$$

• Θα κατασκευάσουμε μια βάση του  $\mathbb{R}_3$  συμπληρώνοντας τη βάση  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  του πυρήνα  $\text{Ker}(f_B)$  σε μια βάση

$$\mathcal{B}'' = \left\{ E''_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E''_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E''_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

του  $\mathbb{R}_3$ . Το παραπάνω σύνολο είναι βάση του  $\mathbb{R}_3$  διότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο  $\{F''_1 = f_B(E''_1), F''_2 = f_B(E''_2)\}$  είναι μια βάση της  $\text{Im}(f_B)$  της  $f_B$ . Έχουμε: Έχουμε:

$$F''_1 = f_B(E''_1) = BE''_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F''_2 = f_B(E''_2) = BE''_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Συμπληρώνουμε τη βάση  $\{F_1'', F_2''\}$  της  $\text{Im}(f_B)$  σε μια βάση

$$\mathcal{C}'' = \left\{ F_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, F_2'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

του  $\mathbb{R}_3$ . Το παραπάνω σύνολο είναι βάση του  $\mathbb{R}_3$  διότι

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση  $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$  του  $\mathbb{R}_3$  στη βάση  $\mathcal{C}''$  είναι τότε ο πίνακας:

$$P_2 = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας μετάβασης από την κανονική βάση  $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3\}$  του  $\mathbb{R}_3$  στη βάση  $\mathcal{C}''$  είναι τότε ο πίνακας:

$$Q_2 = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}''} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$Q_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad (\dagger\dagger)$$

Από τις σχέσεις  $(\dagger)$  και  $(\dagger\dagger)$ , προκύπτει ότι:

$$Q_1^{-1}AP_1 = Q_2^{-1}BP_2 \implies Q_2Q_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B$$

Θέτουμε

$$Q = Q_1Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P = P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

και τότε:

$$Q^{-1}AP = B$$

**Άσκηση 14.** Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η βαθμίδα  $\mathbf{r}(A) := r$  του  $A$  και ακολούθως να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες  $P, Q$  έτσι ώστε

$$Q^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

όπου  $I_r$  είναι ο μοναδιαίος  $r \times r$  πίνακας.

**Λύση.** Χρησιμοποιούμε ότι ο  $3 \times 4$  πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας της  $\mathbb{K}$ -γραμμικής απεικόνισης

$$f_A : M_4(\mathbb{K}) \longrightarrow M_3(\mathbb{K})$$

ως προς τις αντίστοιχες κανονικές βάσεις

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

του  $M_4(\mathbb{K})$  και

$$\mathcal{C} = \left\{ F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

του  $M_3(\mathbb{K})$ . Δηλαδή, αν  $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{K})$ , τότε

$$f_A(X) = AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma + 2\delta \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta \\ \alpha + 5\beta + 3\gamma - 2\delta \end{pmatrix}$$

Προσδιορίζουμε τον  $\text{Ker}(f)$ : Ένα διάνυσμα  $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$  ανήκει στον πυρήνα της  $\phi$ , αν και μόνο αν,

$$\begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma + 2\delta \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta \\ \alpha + 5\beta + 3\gamma - 2\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Επιλύοντας το αντίστοιχο ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta + \gamma + 2\delta &= 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta &= 0 \\ \alpha + 5\beta + 3\gamma - 2\delta &= 0 \end{aligned}$$

ως προς  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , διαπιστώνουμε ότι το διάνυσμα  $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$  ανήκει στον πυρήνα της  $f_A$ , αν και μόνο αν

$$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\frac{\alpha}{2} - \beta \\ -\frac{\alpha}{4} + \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Προφανώς τότε το σύνολο

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του  $\text{Ker}(f_A)$ , και άρα η διάσταση του πυρήνα  $\text{Ker}(f_A)$  είναι ίση με 2. Συμπληρώνουμε τη βάση αυτή σε μια βάση του  $M_4(\mathbb{K})$ . Πράγματι, το σύνολο

$$\mathcal{B}' = \left\{ E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E'_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, E'_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



είναι βάση του  $M_4(\mathbb{K})$ . Αυτό ελέγχεται εύκολα, διαπιστώνοντας ότι η οριζούσα του πίνακα

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι διάφορη του μηδενός. Η εικόνα  $\text{Im}(f_A)$  έχει διάσταση  $4 - \dim(\text{Ker } f_A) = 2$ . Αυτή είναι ακριβώς και η βαθμίδα του  $A$  επειδή γνωρίζουμε ότι  $\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f_A) = \mathbf{r}(A)$ . Επιπλέον μια βάση της εικόνας  $\text{Im}(f_A)$  αποτελείται<sup>1</sup> από τα διανύσματα  $f_A(E'_1)$ , και  $f_A(E'_2)$ . Επειδή

$$f_A(E'_1) = AE'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad f_A(E'_2) = AE'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ώστε μια βάση της εικόνας είναι το σύνολο

$$\mathcal{L} = \left\{ f_A(\vec{c}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_A(\vec{c}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Συμπληρώνουμε την  $\mathcal{L}$  σε μια βάση του  $M_3(\mathbb{K})$ . Πράγματι, το σύνολο

$$\mathcal{C}' = \left\{ F'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad F'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι βάση του  $M_3(\mathbb{K})$ . (Τα τρία διανύσματα του  $\mathcal{C}'_3$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε έναν χώρο διάστασης 3.) Ας δούμε τη μορφή έχει ο πίνακας  $M(f_A)_{\mathcal{B}'}$  της  $f_A$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{C}'$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} f_A(E'_1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1F'_1 + 0F'_2 + 0F'_3, \\ f_A(E'_2) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0F'_1 + 1F'_2 + 0F'_3, \\ f_A(E'_3) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0F'_1 + 0F'_2 + 0F'_3, \\ f_A(E'_4) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0F'_1 + 0F'_2 + 0F'_3 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f_A) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f_A) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$$

<sup>1</sup>Τα διανύσματα  $f_A(E'_1)$ , και  $f_A(E'_2)$  προφανώς παράγουν την εικόνα  $\text{Im}(f_A)$  και είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι αν  $\lambda f_A(E'_1) + \mu f_A(E'_2) = \vec{0}$ , τότε:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \lambda f_A(E'_1) + \mu f_A(E'_2) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ 2\lambda + \mu \\ \lambda + 5\mu \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \lambda = \mu \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 5\mu = 0 \end{cases} \implies \lambda = \mu = 0$$

όπου ο  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  είναι ο πίνακας μετάβασης από την  $\mathcal{B}$  στη  $\mathcal{B}'$  και ο  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$  είναι ο πίνακας μετάβασης από την  $\mathcal{C}$  στη  $\mathcal{C}'$ . Δηλαδή,

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Όστε ο πίνακας  $P$  της άσκησης είναι ο  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  και ο πίνακας  $Q$  της άσκησης είναι ο  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$ . Αυτό ελέγχεται αφού το αποτέλεσμα τού πολλαπλασιασμού:

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Για βοήθεια:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .

Αφού λοιπόν ο  $A$  είναι ισοδύναμος με τον  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  έχει την ίδια βαθμίδα με αυτόν, δηλαδή 2.

**Άσκηση 15.** Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$$

όπου

$$f(x, y, z, w) = (2x + y - 2z + w, 4x + y - 2z - 3w, x - y + 2z - 3w, 2x + 2y - 4z - 5w, 3x + y - 2z + 2w)$$

- (1) Να βρεθεί ο πίνακας  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$  της  $f$  ως προς τις κανονικές βάσεις  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{C}$  των  $\mathbb{R}^4$  και  $\mathbb{R}^5$  αντίστοιχα.
- (2) Να βρεθεί μια βάση  $\mathcal{B}'$  του  $\mathbb{R}^4$  και μια βάση  $\mathcal{C}'$  του  $\mathbb{R}^5$  έτσι ώστε:

$$B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } r = \mathbf{r}(f)$$

- (3) Να βρεθεί αντιστρέψιμος  $5 \times 5$  πίνακας  $Q$  και αντιστρέψιμος  $4 \times 4$  πίνακας  $P$  έτσι ώστε:

$$Q^{-1}AP = B$$

**Λύση.** (1) Θεωρούμε τις κανονικές βάσεις

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{C} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0, 0), \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \vec{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

των  $\mathbb{R}^4$  και  $\mathbb{R}^5$  αντίστοιχα.

Για τον προσδιορισμό του πίνακα  $A$  θα έχουμε:

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0, 0, 0) = (2, 4, 1, 2, 3) = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 + 3\vec{e}_5$$

$$f(\vec{e}_2) = f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, -1, 2, 1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 + \vec{e}_5$$

$$f(\vec{e}_3) = f(0, 0, 1, 0) = (-2, -2, 2, -4, -2) = -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4 - 2\vec{e}_5$$

$$f(\vec{e}_4) = f(0, 0, 0, 1) = (1, -3, -3, -5, 2) = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 - 5\vec{e}_4 + 2\vec{e}_5$$

Επομένως

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) (α) Θα προσδιορίσουμε πρώτα μια βάση του πυρήνα  $\text{Ker}(f)$  της  $f$  και ακολούθως θα την συμπληρώσουμε σε μια βάση του  $\mathbb{R}^4$ .

Έστω  $\vec{a} = (x, y, z, w) \in \text{Ker}(f)$ . Τότε  $f(\vec{a}) = f(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ , και επομένως θα έχουμε:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + w = 0 \\ 4x + y - 2z - 3w = 0 \\ x - y + 2z - 3w = 0 \\ 2x + 2y - 4z - 5w = 0 \\ 3x + y - 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

Επομένως το διάνυσμα  $\vec{a}$  ανήκει στον πυρήνα της  $f$  αν και μόνον αν οι συνιστώσες του αποτελούν λύση του ομογενούς συστήματος

$$(\Sigma) \quad AX = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad (\Sigma) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα  $A$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_4, \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 2\Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_5} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -8 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \frac{1}{4}\Gamma_4, \Gamma_5 \rightarrow \Gamma_5 + 3\Gamma_1]{\Gamma_1 \rightarrow -\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{3}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{3} \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 = \Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1, \Gamma_5 \rightarrow \Gamma_5 - \Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{3} \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{31}{12} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \frac{12}{31}\Gamma_4, \Gamma_5 \rightarrow -\frac{4}{5}\Gamma_5]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_5 \rightarrow \Gamma_5 - \Gamma_4, \Gamma_2 + \frac{7}{3}\Gamma_4]{\Gamma_3 \rightarrow -3\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 - \Gamma_3]{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := A'$$

και τότε το ομογενές σύστημα  $(\Sigma)$  είναι ισοδύναμο με το ομογενές σύστημα

$$A'X = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \\ w = 0 \end{cases}$$

Επομένως

$$\text{Ker}(f) = \{(0, 2z, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 2, 1, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 2, 1, 0) \rangle$$

Το μη-μηδενικό διάνυσμα  $\vec{e}'_4 = (0, 2, 1, 0)$  είναι βάση του πυρήνα  $\text{Ker}(f)$  της  $f$ .

Συμπληρώνουμε τη βάση  $\{\vec{e}'_4\}$  του πυρήνα  $\text{Ker}(f)$  σε μια βάση  $\mathcal{B}'$  του  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{e}'_2 = \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{e}'_3 = \vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1), \vec{e}'_4 = (0, 2, 1, 0)\}$$

Αυτό μπορεί να γίνει διότι η ορίσουςα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(β) Θα προσδιορίσουμε τώρα μια βάση της εικόνας  $\text{Im}(f)$  της  $f$  και ακολούθως θα την συμπληρώσουμε σε μια βάση του  $\mathbb{R}^5$ .

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι τα διανύσματα  $\{f(\vec{e}'_1), f(\vec{e}'_2), f(\vec{e}'_3)\}$  είναι μια βάση της εικόνας  $\text{Im}(f)$  της  $f$ . Υπολογίζουμε:

$$\vec{e}'_1 := f(\vec{e}'_1) = f(\vec{e}_1) = (2, 4, 1, 2, 3)$$

$$\vec{e}'_2 := f(\vec{e}'_2) = f(\vec{e}_2) = (1, 1, -1, 2, 1)$$

$$\vec{e}'_3 = f(\vec{e}'_3) = f(\vec{e}_4) = (1, -3, -3, -5, 2)$$

Έτσι αποκτούμε μια βάση  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$  της  $\text{Im}(f)$  την οποία συμπληρώνουμε σε μια βάση  $\mathcal{C}'$  του  $\mathbb{R}^5$ :

$$\mathcal{C}' = \left\{ \vec{e}'_1 = (2, 4, 1, 2, 3), \vec{e}'_2 = (1, 1, -1, 2, 1), \vec{e}'_3 = (1, -3, -3, -5, 2), \right. \\ \left. \vec{e}'_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \vec{e}'_5 = (0, 0, 0, 0, 1) \right\}$$

Αυτό μπορεί να γίνει διότι η ορίσουςα

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

Σύμφωνα με το μέρος (2), έχουμε  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(f) = 1$  και επομένως από την εξίσωση διαστάσεων για την  $f$  προκύπτει ότι  $\text{r}(f) = 4 - 1 = 3$ . Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ο πίνακας  $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)$  της  $f$  ως προς τις βάσεις  $\mathcal{B}'$  και  $\mathcal{C}'$  είναι ο

$$B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} I_3 & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι αν  $Q = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}$  είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathcal{C}$  στη βάση  $\mathcal{C}'$  του  $\mathbb{R}^5$  και  $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση  $\mathcal{B}$  στη βάση  $\mathcal{B}'$  του  $\mathbb{R}^4$ , τότε:  $Q^{-1}AP = B$ . Επειδή οι βάσεις  $\mathcal{B}$  και  $\mathcal{C}$  είναι οι κανονικές βάσεις των  $\mathbb{R}^4$  και  $\mathbb{R}^5$  αντίστοιχα, ο πίνακας  $Q$  έχει ως στήλες τις συνιστώσες των διανυσμάτων της βάσης  $\mathcal{C}'$  και ο πίνακας  $P$  έχει ως στήλες τις συνιστώσες των διανυσμάτων της βάσης  $\mathcal{B}'$ . Επομένως:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$