

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 14 Ιανουαρίου 2022

Υπενθυμίζουμε ότι η βαθμίδα $r(f)$ μιας γραμμικής απεικόνισης $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, όπου οι \mathcal{E} και \mathcal{F} είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος \mathbb{K} ορίζεται ως εξής:

$$r(f) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f)$$

Αν $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, τότε η βαθμίδα του A μπορεί να ορισθεί να είναι η βαθμίδα

$$r(A) = r(f_A)$$

της επαγόμενης γραμμικής απεικόνισης

$$f_A: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_m, \quad X \mapsto f_A(X) = AX$$

Γνωρίζουμε ότι αν $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ είναι η κανονική βάση του \mathbb{K}_n , τότε $\text{Im}(f_A) = \langle f_A(E_1), f_A(E_2), \dots, f_A(E_n) \rangle$. Επειδή $f_A(E_i)$ είναι η i -οστή στήλη Σ_i του A , $1 \leq i \leq n$, έπεται ότι:

$$r(A) = \dim_{\mathbb{K}} \langle \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n \rangle$$

Δηλαδή $r(A)$ είναι το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A . Γι' αυτό και η βαθμίδα του A καλείται και η **βαθμίδα στηλών** του A , και συμβολίζεται προσωρινά με $r(A) = \sigma(A)$. Από την άλλη πλευρά μπορούμε να ορίσουμε την **βαθμίδα γραμμών** του A ως:

$$\gamma(A) = \dim_{\mathbb{K}} \langle \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m \rangle$$

δηλαδή $\gamma(A)$ είναι το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του πίνακα A . Επειδή οι γραμμές του A είναι οι στήλες του ${}^t A$ και οι στήλες του A είναι οι γραμμές του ${}^t A$, έπεται ότι:

$$\gamma({}^t A) = \sigma(A) \quad \text{και} \quad \sigma({}^t A) = \gamma(A)$$

Γνωρίζουμε ότι η βαθμίδα γραμμών ενός πίνακα είναι ίση με τη βαθμίδα στηλών του πίνακα. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού η οποία δόθηκε στο μάθημα χρησιμοποιήθηκε η αναγωγή ενός πίνακα στην ισχυρά σ -κλιμακωτή μορφή του και στην ισχυρά γ -κλιμακωτή μορφή του. Στην επόμενη Άσκηση δείχνουμε με έναν διαφορετικό τρόπο ότι η βαθμίδα στηλών ενός πίνακα συμπίπτει με τη βαθμίδα γραμμών.

Άσκηση 1. Για κάθε $m \times n$ πίνακα A , η βαθμίδα στηλών του A είναι ίση με τη βαθμίδα γραμμών του A :

$$r(A) = \sigma(A) = \gamma(A)$$

Λύση. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$f_A: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_m, \quad X \mapsto f_A(X) = AX$$

$$f_{{}^t A A}: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_m, \quad X \mapsto f_{{}^t A A}(X) = {}^t A A X$$

οι οποίες επάγονται από τους πίνακες A και ${}^t A A$. Γνωρίζουμε από την παραπάνω ανάλυση ότι $r(f_A) = \sigma(A)$ και συμβολίσουμε την κοινή αυτή τιμή με $r(f_A) = \sigma(A) = r(A)$.

Προφανώς, $\forall X \in \mathbb{K}_n$:

$$f_{tAA}(X) = {}^tAAX = f_{tA}(AX) = f_{tA}(f_A(X)) \implies \text{Im}(f_{tAA}) \subseteq \text{Im}(f_{tA}) \implies \mathbf{r}(tAA) \leq \mathbf{r}(tA)$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} \text{Im}(f_{tAA}) &= \{ {}^tAAX \in \mathbb{K}_n \mid X \in \mathbb{K}_n \} \subseteq \{ {}^tAY \in \mathbb{K}_n \mid Y \in \mathbb{K}_m \} \subseteq \text{Im}(f_{tA}) \implies \\ &\implies \mathbf{r}(tAA) \leq \mathbf{r}(tA) = \sigma(tA) = \gamma(A) \end{aligned} \quad (\dagger)$$

Έστω $r = \mathbf{r}(A) = \sigma(A)$ και έστω $\{AX_1, \dots, AX_r\}$ μια βάση του $\text{Im}(f_A)$. Έστω $\lambda_1 {}^tAAX_1 + \dots + \lambda_r {}^tAAX_r = 0$. Τότε ${}^tA(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r) = 0$ και έστω $Y = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r$. Τότε ${}^t(A \cdot Y)(A \cdot Y) = {}^tY \cdot {}^tA \cdot A \cdot Y = 0$. Προφανώς¹ όμως μια στήλη $Z = AY$ ικανοποιεί την ${}^tZ \cdot Z = 0$ αν και μόνον αν $Z = 0$. Επομένως $A \cdot Y = 0$ και άρα $A(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r) = 0 \implies \lambda_1 AX_1 + \dots + \lambda_r AX_r = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$, λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των AX_1, \dots, AX_r . Επομένως το υποσύνολο $\{ {}^tAAX_1, \dots, {}^tAAX_r \}$ του $\text{Im}(f_{tAA})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα $\mathbf{r}(A) = r \leq \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f_{tAA}) = \mathbf{r}(tAA)$. Επομένως:

$$\mathbf{r}(A) \leq \mathbf{r}(tAA) \quad (\dagger\dagger)$$

Από τις σχέσεις (\dagger) και $(\dagger\dagger)$ προκύπτει ότι:

$$\sigma(A) = \mathbf{r}(A) \leq \mathbf{r}(tAA) \leq \gamma(A) \quad (*)$$

Δουλεύοντας με γραμμές, ισοδύναμα εργαζόμενοι με τον πίνακα tA αντί του πίνακα A , θα έχουμε αντίστοιχα ότι:

$$\gamma(A) = \mathbf{r}(A) \leq \sigma(A) \quad (**)$$

Από τις σχέσεις $(*)$ $(**)$ προκύπτει ότι:

$$\mathbf{r}(A) = \sigma(A) = \gamma(A)$$

Άσκηση 2. Έστω $g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ και $h: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ τρεις γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Να δειχθούν τα εξής:

- (1) Αν η g είναι επιμορφισμός, τότε: $\mathbf{r}(f \circ g) = \mathbf{r}(f)$.
- (2) Αν η f είναι μονομορφισμός, τότε: $\mathbf{r}(f \circ g) = \mathbf{r}(g)$.
- (3) Αν η h είναι μονομορφισμός και η g είναι επιμορφισμός, τότε: $\mathbf{r}(h \circ f \circ g) = \mathbf{r}(f)$.

Λύση. (1) Αν $\vec{z} \in \text{Im}(f \circ g)$, τότε υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $(f \circ g)(\vec{x}) = \vec{z}$ και τότε: $\vec{z} = f(g(\vec{x})) \in \text{Im}(f)$. Άρα $\text{Im}(f \circ g) \subseteq \text{Im}(f)$. Αν $\vec{z} \in \text{Im}(f)$, τότε υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{F}$ έτσι ώστε $f(\vec{y}) = \vec{z}$. Επειδή η g είναι επιμορφισμός, υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $g(\vec{x}) = \vec{y}$ και τότε: $(f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = f(\vec{y}) = \vec{z} \in \text{Im}(f \circ g)$. Άρα $\text{Im}(f) \subseteq \text{Im}(f \circ g)$ και επομένως $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ g)$. Τότε $\mathbf{r}(f \circ g) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f \circ g) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f) = \mathbf{r}(f)$.

- (2) Αν $\vec{x} \in \text{Ker}(g)$, τότε $g(\vec{x}) = \vec{0}$ και $f(g(\vec{x})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, δηλαδή $\vec{x} \in \text{Ker}(f \circ g)$ και επομένως $\text{Ker}(g) \subseteq \text{Ker}(f \circ g)$. Έστω $\vec{x} \in \text{Ker}(f \circ g)$. Τότε $(f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = \vec{0}$, δηλαδή $g(\vec{x}) \in \text{Ker}(f)$. Επειδή η f είναι μονομορφισμός, έπεται ότι $g(\vec{x}) = \vec{0}$, δηλαδή $\vec{x} \in \text{Ker}(g)$. Άρα $\text{Ker}(f \circ g) \subseteq \text{Ker}(g)$ και επομένως $\text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker}(g)$. Από την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(g \circ f) + \mathbf{r}(f \circ g) \quad \text{και} \quad \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(g) + \mathbf{r}(g)$$

Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f \circ g) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(g)$, από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι: $\mathbf{r}(f \circ g) = \mathbf{r}(g)$.

- (3) Επειδή η h είναι μονομορφισμός, από το μέρος (2) έπεται ότι $\mathbf{r}(h \circ f \circ g) = \mathbf{r}(f \circ g)$. Επειδή η g είναι επιμορφισμός, έπεται ότι $\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f)$. Άρα:

$$\mathbf{r}(h \circ f \circ g) = \mathbf{r}(f \circ g) = \mathbf{r}(f)$$

Η επόμενη Άσκηση παρουσιάζει μια σύντομη απόδειξη ενός γνωστού μας Θεωρήματος.

$${}^1\text{Αν } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}, \text{ τότε } {}^tZZ = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_m) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_m^2.$$

Άρα ${}^tZZ = 0$ αν και μόνον αν $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_m^2 = 0$ αν και μόνον αν $z_1 = z_2 = \dots = z_m = 0$ αν και μόνον αν $Z = 0$.

Άσκηση 3. Έστω A και B δύο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Τότε οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι αν και μόνον αν $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B)$.

Λύση. Αν οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας Q και ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P έτσι ώστε: $Q^{-1}AP = B$. Τότε για κάθε $X \in \mathbb{K}_n$:

$$f_B(X) = f_{Q^{-1}AP}(X) = Q^{-1}APX = Q^{-1}A f_P(X) = Q^{-1}f_A(f_P(X)) = f_{Q^{-1}}(f_A(f_P(X))) = (f_{Q^{-1}} \circ f_A \circ f_P)(X)$$

Επομένως:

$$f_B = f_{Q^{-1}} \circ f_A \circ f_P$$

Επειδή οι πίνακες Q^{-1} και P είναι αντιστρέψιμοι, έπεται² ότι οι γραμμικές απεικονίσεις $f_{Q^{-1}}$ και f_P είναι ισομορφισμοί. Από την Άσκηση 2 έπεται τότε ότι:

$$\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(f_A) = \mathbf{r}(f_B) = \mathbf{r}(B)$$

Αντίστροφα, έστω ότι: $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B)$. Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A είναι ισοδύναμος με τον πίνακα $\begin{pmatrix} \mathbf{r}(A) & O \\ O & O \end{pmatrix}$ και ο πίνακας B είναι ισοδύναμος με τον πίνακα $\begin{pmatrix} \mathbf{r}(B) & O \\ O & O \end{pmatrix}$. Επειδή η ισοδυναμία πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων, και επειδή $\begin{pmatrix} \mathbf{r}(A) & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(B) & O \\ O & O \end{pmatrix}$, έπεται ότι οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι.

Άσκηση 4. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας και $\text{adj}(A)$ ο συμπληρωματικός του A . Να δειχθούν τα εξής:

- (1) $\text{adj}(A) = O \iff \mathbf{r}(A) < n - 1$.
- (2) $\mathbf{r}(A) = n \implies \mathbf{r}(\text{adj}(A)) = n$.
- (3) $\mathbf{r}(A) < n - 1 \implies \mathbf{r}(\text{adj}(A)) = 0$.
- (4) $\mathbf{r}(A) = n - 1 \implies \mathbf{r}(\text{adj}(A)) = 1$.

Λύση. (1) Από τον ορισμό του συμπληρωματικού πίνακα $\text{adj}(A)$ του A έχουμε ότι $\text{adj}(A) = O$ αν και μόνο αν όλες οι ελάσσονες οριζουσες τάξης $n - 1$ είναι ίσες με 0. Επομένως έχουμε ισοδύναμα ότι $\mathbf{r}(A) < n - 1$ αφού από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι $\mathbf{r}(A) < k$ αν και μόνο αν υπάρχει ελάσσονα οριζουσα τάξης $k \neq 0$ και όλες οι ελάσσονες οριζουσες τάξης μεγαλύτερης του k είναι ίσες με 0.

- (2) Έστω $\mathbf{r}(A) = n$. Τότε $|A| \neq 0$, δηλαδή ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Όμως από την ακόλουθη σχέση:

$$A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I_n = \text{adj}(A) \cdot A$$

έπεται ότι $|\text{adj}(A)| \neq 0$ και άρα ο $\text{adj}(A)$ έχει μέγιστη βαθμίδα, δηλαδή: $\mathbf{r}(\text{adj}(A)) = n$.

- (3) Αν $\mathbf{r}(A) < n - 1$ τότε από το (1) έχουμε ότι $\text{adj}(A) = O$ και άρα $\mathbf{r}(\text{adj}(A)) = 0$.
- (4) Έστω $\mathbf{r}(A) = n - 1$. Τότε $|A| = 0$ αφού $\mathbf{r}(A) < n$. Συνεπώς από τη σχέση $A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I_n = \text{adj}(A) \cdot A$ έχουμε

$$A \cdot \text{adj}(A) = 0 = \text{adj}(A) \cdot A \quad (*)$$

Θέτουμε $B = \text{adj}(A)$ και ορίζουμε τις παρακάτω απεικονίσεις:

$$\mathbb{K}_n \xrightarrow{f_A} \mathbb{K}_n \xrightarrow{f_B} \mathbb{K}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X \quad \text{και} \quad f_B(X) = B \cdot X$$

²Για κάθε $m \times n$ πίνακα A , ισχύει ότι:

$$f_A : \text{ισομορφισμός} \iff A : \text{αντιστρέψιμος}$$

Πράγματι, αν η f_A είναι ισομορφισμός, τότε προφανώς $m = n$ και ο πίνακας της f_A ως προς τις κανονικές βάσεις των \mathbb{K}_m και \mathbb{K}_n , δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος. Αντίστροφα, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $m = n$ και θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f_{A^{-1}}: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$, $f_{A^{-1}}(X) = A^{-1}X$. Θα έχουμε:

$$(f_A \circ f_{A^{-1}})(X) = f_A(f_{A^{-1}}(X)) = f_A(A^{-1}X) = A(A^{-1}X) = (AA^{-1})X = I_n X = X \implies f_A \circ f_{A^{-1}} = \text{Id}_{\mathbb{K}_n}$$

$$(f_{A^{-1}} \circ f_A)(X) = f_{A^{-1}}(f_A(X)) = f_{A^{-1}}(AX) = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = I_n X = X \implies f_{A^{-1}} \circ f_A = \text{Id}_{\mathbb{K}_n}$$

Άρα η απεικόνιση f_A είναι ισομορφισμός και $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$.

Τότε

$$f_{B \cdot A}(X) = B \cdot A \cdot X = B \cdot (A \cdot X) = B \cdot (f_A(X)) = f_B(f_A(X)) = (f_B \circ f_A)(X)$$

$$\implies f_{B \cdot A} = f_B \circ f_A$$

και άρα από τη σχέση (*) έχουμε

$$f_B \circ f_A = 0$$

Έστω $Y \in \text{Im}(f_A)$. Τότε $Y = f_A(X)$ και από την παραπάνω σχέση έχουμε $f_B(f_A(X)) = 0$. Άρα $Y = f_A(X) \in \text{Ker}(f_B)$ και επομένως

$$\text{Im}(f_A) \subseteq \text{Ker}(f_B)$$

Τότε από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f_A) \leq \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f_B) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n - \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f_B)$$

$$\implies \mathbf{r}(A) \leq n - \mathbf{r}(B)$$

$$\implies \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B) \leq n$$

$$\implies n - 1 + \mathbf{r}(B) \leq n$$

$$\implies \mathbf{r}(B) \leq 1$$

Έστω ότι $\mathbf{r}(B) = 0$. Τότε $B = \text{adj}(A) = O$ και άρα από το (1) έχουμε $\mathbf{r}(A) < n - 1$, που είναι άτοπο. Επομένως $\mathbf{r}(B) = \mathbf{r}(\text{adj}(A)) = 1$.

Η ιδέα στην απόδειξη του (4) στην Άσκηση 4 είναι η χρήση του εξής γενικότερου αποτελέσματος που αναλύεται στην επόμενη Άσκηση:

Άσκηση 5. Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις

$$\mathcal{E} \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$$

μεταξύ \mathbb{K} -διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Αν $f \circ g = 0$, τότε:

- (1) $\text{Im}(g) \subseteq \text{Ker}(f)$.
- (2) $\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$.
- (3) $\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$ αν και μόνον αν $\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)$.

Λύση. (1) Έστω $\vec{y} \in \text{Im}(g)$. Τότε $\vec{y} = g(\vec{x})$ και άρα χρησιμοποιώντας ότι $f \circ g = 0$, θα έχουμε $f(\vec{y}) = f(g(\vec{x})) = \vec{0}$. Άρα $\vec{y} \in \text{Ker}(f)$ και επομένως

$$\text{Im}(g) \subseteq \text{Ker}(f)$$

(2) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(g) \leq \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} - \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f)$$

$$\implies \mathbf{r}(g) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} - \mathbf{r}(f)$$

$$\implies \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$$

(3) Παρατηρούμε ότι η ανισότητα στο (2) είναι ισότητα αν και μόνον αν $\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(g) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(f)$. Επειδή από το (1) ισχύει $\text{Im}(g) \subseteq \text{Ker}(f)$, αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι: $\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)$.

Άσκηση 6. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, όπου $n \geq 2$, με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Ναδειχθεί ότι ισχύουν τα εξής:

(1)

$$|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

(2)

$$\text{adj}(\text{adj}(A)) = |A|^{n-2} A$$

(3)

$$|\text{adj}(\text{adj}(A))| = |A|^{(n-1)^2}$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει ότι:

$$\text{adj}(A) \cdot A = |A| I_n \quad (\dagger)$$

και επομένως θα έχουμε και:

$$\text{adj}(\text{adj}(A)) \cdot \text{adj}(A) = |\text{adj}(A)| I_n \quad (\dagger\dagger)$$

(1) Θεωρώντας οριζουσες στην (\dagger) έχουμε:

$$|\text{adj}(A)| |A| = |A|^n \quad (*)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Αν $r(A) = n$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και άρα $|A| \neq 0$. Τότε από τη σχέση $(*)$ προκύπτει ότι:

$$|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

(β) Αν $r(A) < n$, τότε προφανώς $|A| = 0$ και από την Άσκηση 4 έχουμε $r(\text{adj}(A)) \leq 1 \neq n$. Ιδιαίτερα θα έχουμε $|\text{adj}(A)| = 0$ και τότε η ζητούμενη σχέση (\dagger) ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.

(2) Πολλπλασιάζουμε κάθε μέλος της σχέσης (\dagger) με τον πίνακα A , και λαμβάνοντας υπ όψιν το μέρος (1), θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{adj}(\text{adj}(A)) \cdot \text{adj}(A) \cdot A &= |\text{adj}(A)| A \implies \text{adj}(\text{adj}(A)) |A| I_n = |A|^{n-1} A \implies \\ |A| \text{adj}(\text{adj}(A)) &= |A|^{n-1} A \end{aligned} \quad (**)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Αν $r(A) = n$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και άρα $|A| \neq 0$. Προφανώς τότε θα έχουμε:

$$\text{adj}(\text{adj}(A)) = |A|^{n-2} A$$

(β) Αν $r(A) < n - 1$, τότε $|A| = 0$ από την Άσκηση 4 έπεται ότι $\text{adj}(A) = O$ και άμεσα έχουμε $\text{adj}(\text{adj}(A)) = O$. Προφανώς τότε η σχέση $\text{adj}(\text{adj}(A)) = |A|^{n-2} A$ ικανοποιείται τετριμμένα.

(γ) Αν $r(A) = n - 1$, διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) $n = 2$. Τότε $|A|^{n-2} = |A|^0 = 1$ και επειδή, όπως μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα, $\text{adj}(\text{adj}(A)) = A$, η ζητούμενη σχέση ισχύει.

(ii) Αν $n > 2$. Τότε θα έχουμε $|A| = 0$ και από την Άσκηση 4 έπεται ότι $r(\text{adj}(A)) = 1 < n - 1$. Από την ίδια Άσκηση 4 έπεται τότε ότι $\text{adj}(\text{adj}(A)) = O$, και άρα η ζητούμενη σχέση ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.

(3) Προκύπτει άμεσα θεωρώντας οριζουσες στη σχέση του μέρους (2).

Υπενθυμίζουμε ότι η βαθμίδα ενός πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ μπορεί να προσδιορισθεί και με χρήση ελασσόνων οριζουσών: $r(A) = k$ αν και μόνον αν υπάρχει μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης k στον A και όλες οι ελάσσονες οριζουσες τάξης $k + 1$ οι οποίες την περιβάλλουν είναι ίσες με μηδέν.

Άσκηση 7. Να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης 4 στον A :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1, \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_2]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 2\Gamma_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{στοιχεία της δεύτερης γραμμής}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα}} \\ &= -(-1) \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 4\Gamma_2]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 7\Gamma_2} \begin{vmatrix} 0 & 9 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{στοιχεία της δεύτερης γραμμής}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα}} - \begin{vmatrix} 9 & -9 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= -(-45 + 72) = -27 \neq 0$$

Επομένως βρήκαμε μια ελάσσονα οριζούσα τάξης 4 του A η οποία είναι μη-μηδενική και επειδή δεν υπάρχουν ελάσσονες οριζούσες τάξης 5 στον A , έπεται ότι:

$$\mathbf{r}(A) = 4$$

Άσκηση 8. Να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζούσα τάξης 3 στον A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Υπολογίζουμε τις ελάσσονες οριζούσες τάξης 4 οι οποίες πλαισιώνουν την Δ :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

όπου η τελευταία οριζούσα είναι ίση με μηδέν διότι ο πίνακας έχει την τελευταία του γραμμή ίση με μηδέν.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow -\Gamma_4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

όπου αναπτύξαμε κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής και η τελευταία οριζούσα είναι ίση με μηδέν διότι ο πίνακας έχει την πρώτη και την τρίτη γραμμή του ίσες.

Επομένως βρήκαμε μια ελάσσονα οριζούσα τάξης 3 του A η οποία είναι μη-μηδενική και όλες οι ελάσσονες οριζούσες τάξης 4 οι οποίες την πλαισιώνουν είναι ίσες με μηδέν. Άρα:

$$\mathbf{r}(A) = 3$$

Άσκηση 9. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζούσα τάξης 2, την:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

Θεωρούμε τις ελάσσονες οριζούσες οι οποίες πλαισιώνουν την Δ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda - 3)(\lambda + 5)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 3\lambda - 9 = 3(\lambda - 3)$$

Αν $\lambda = 3$, τότε έπεται ότι $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ και επομένως ο πίνακας A έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης 2 και όλες οι ελάσσονες οριζουσες τάξης 3 που την πλαισιώνουν είναι ίσες με μηδέν. Επομένως $r(A) = 2$.

Αν $\lambda \neq 3$, τότε $\Delta_2 \neq 0$ και άρα ο πίνακας A έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης 3. Επειδή δεν υπάρχουν ελάσσονες οριζουσες τάξης 4, έπεται ότι $r(A) = 3$.

Άρα:

$$r(A) = \begin{cases} 2, & \text{αν } \lambda = 3 \\ 3, & \text{αν } \lambda \neq 3 \end{cases}$$

Άσκηση 10. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Λύση. Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 3\Gamma_3} \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -12 & -30 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow -\frac{1}{6}\Gamma_2]{\Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{5}\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow -\Gamma_2} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow 2\Gamma_4} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

και τότε, επειδή η βαθμίδα ενός πίνακα δεν αλλιάζει μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του πίνακα, προφανώς θα έχουμε: $r(A) = r(A')$.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A' έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης 3, την:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 17 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{της πρώτης γραμμής}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} (-1) \begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(35 - 34) = -1 \neq 0$$

Ο πίνακας A' έχει μόνο μια ελάσσονα οριζουσα τάξης 4 την:

$$|A'| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{της πρώτης γραμμής}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} \lambda \Delta = -\lambda$$

Αν $\lambda = 0$, τότε ο πίνακας A έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης 3 και η μοναδική ελάσσονα οριζουσα τάξης 4 η οποία την περιβάλλει είναι ίση με μηδέν. Άρα $r(A) = 3$.

Αν $\lambda \neq 0$, τότε ο 4×4 πίνακας A έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης 4. Άρα $r(A) = 4$.

Επομένως:

$$r(A) = \begin{cases} 3, & \text{αν } \lambda = 0 \\ 4, & \text{αν } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Άσκηση 11. Αν $a, b \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η βαθμίδα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 2 & 1 & b+1 & 4 \\ b & 3 & 2 & 3a \end{pmatrix}$$

Λύση. Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 2 & 1 & b+1 & 4 \\ b & 3 & 2 & 3a \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 0 & 0 & b & 4+6a \\ b & 3 & 2 & 3a \end{pmatrix} = A'$$

και προφανώς $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A')$.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A' έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης 2, την:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Υπολογίζουμε τις δύο ελάσσονες οριζουσες τάξης 3 οι οποίες πλαισιώνουν την Δ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \\ b & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{της δεύτερης γραμμής}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} (-b) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ b & 3 \end{vmatrix} = -b(6-b)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6a \\ 0 & b & 4+6a \\ 3 & 2 & 3a \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 - 3\Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6a \\ 0 & b & 4+6a \\ 0 & -1 & 21a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{της πρώτης στηλης}]{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} \begin{vmatrix} b & 4+6a \\ -1 & 21a \end{vmatrix} = 21ab + 6a + 4$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- (1) Αν $b \neq 0$ και $b \neq 6$, τότε ο A περιέχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης 3, την Δ_1 , και επειδή δεν υπάρχουν ελάσσονες οριζουσες τάξης 4, έπεται ότι $\mathbf{r}(A) = 3$.
- (2) Έστω $b = 0$.
 - (α) Αν $a = -\frac{2}{3}$, τότε ο πίνακας A' έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης 2, την Δ , και όλες οι ελάσσονες οριζουσες τάξης 3 που την πλαισιώνουν, δηλαδή οι Δ_1 και Δ_2 , είναι ίσες με μηδέν. Επομένως: $\mathbf{r}(A) = 2$.
 - (β) Αν $a \neq -\frac{2}{3}$, τότε $\Delta_2 \neq 0$ και ο A περιέχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης 3. Επειδή δεν υπάρχουν ελάσσονες οριζουσες τάξης 4, έπεται ότι $\mathbf{r}(A) = 3$.
- (3) Έστω $b = 6$.
 - (α) Αν $a = -\frac{1}{33}$, τότε $\Delta_2 = 0$, και ο πίνακας A' έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης 2, την Δ , και όλες οι ελάσσονες οριζουσες τάξης 3 που την πλαισιώνουν, δηλαδή οι Δ_1 και Δ_2 , είναι ίσες με μηδέν. Επομένως: $\mathbf{r}(A) = 2$.
 - (β) Αν $a \neq -\frac{1}{33}$, τότε $\Delta_2 \neq 0$ και ο A περιέχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζουσα τάξης 3. Επειδή δεν υπάρχουν ελάσσονες οριζουσες τάξης 4, έπεται ότι $\mathbf{r}(A) = 3$.

Συνοψίζοντας, έχουμε:

$$\mathbf{r}(A) = \begin{cases} 2, & \text{αν είτε } (b = 0 \text{ και } a = -\frac{2}{3}) \text{ είτε } (b = 6 \text{ και } a = -\frac{1}{33}) \\ 3, & \text{αν είτε } (b \neq 0 \text{ και } b \neq 6) \text{ είτε } (b = 0 \text{ και } a \neq -\frac{2}{3}) \text{ είτε } (b = 6 \text{ και } a \neq -\frac{1}{33}) \end{cases}$$

Άσκηση 12. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες το γραμμικό σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} \lambda x + (3\lambda + 4)y + 2(\lambda + 1)z = 0 \\ \lambda x + (4\lambda + 2)y + (\lambda + 4)z = 0 \\ 2x + (3\lambda + 4)y + 3\lambda z = 0 \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό, και ακολούθως να λυθεί.

Λύση. Ο πίνακας του συστήματος είναι

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ \lambda & 4\lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 2 & 3\lambda + 4 & 3\lambda \end{pmatrix}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ \lambda & 4\lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 2 & 3\lambda + 4 & 3\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3} \begin{vmatrix} 6\lambda + 6 & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ 6\lambda + 6 & 4\lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 6\lambda + 6 & 3\lambda + 4 & 3\lambda \end{vmatrix} \\ &= 6(\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ 1 & 4\lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 1 & 3\lambda + 4 & 3\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} 6(\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & 3\lambda + 4 & 2(\lambda + 1) \\ 0 & \lambda - 2 & -\lambda + 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 6(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 \end{aligned}$$

- (1) Για $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 2$ έχουμε $|A| \neq 0$ και άρα το σύστημα είναι Cramer. Συνεπώς έχει μοναδική λύση τη μηδενική αφού είναι ομογενές.

(2) Έστω $\lambda = -1$. Τότε έχουμε το σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Η βαθμίδα του πίνακα A είναι $r(A) = 2$ αφού

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Συνεπώς το (Σ) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x - 2y = -3z \end{cases} \implies x = y = z$$

Θέτουμε $z = t \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε τη γενική λύση:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(3) Έστω $\lambda = 2$. Τότε έχουμε το σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} 2x + 10y + 6z = 0 \\ 2x + 10y + 6z = 0 \\ 2x + 10y + 6z = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 6 \\ 2 & 10 & 6 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Προφανώς η βαθμίδα του πίνακα A είναι $r(A) = 1$ και λύνοντας έχουμε $x = -5y - 3z$. Θέτουμε $y = \kappa$ και $z = \lambda$. Τότε έχουμε τη γενική λύση: $\{(-5\kappa - 3\lambda, \kappa, \lambda) \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Άσκηση 13. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 + x_7 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = -\lambda \end{cases}$$

Λύση. Ο πίνακας του συστήματος (Σ) είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

Από την πρώτη, δεύτερη και έβδομη στήλη του πίνακα A έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Συνεπώς βρήκαμε μια οριζούσα τάξης 3 διάφορη του 0 έτσι ώστε όλες οι ελάχιστες οριζούσες οριζούσες τάξης 4 που την περιβάλλουν είναι 0. Άρα η βαθμίδα του πίνακα A είναι $r(A) = 3$. Στην συνέχεια θα βρούμε την βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$. Έχουμε:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_1]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2 \\ \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) Αν $\lambda \neq 1$ τότε η βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$ είναι $r(A|B) = 4$ διότι

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 - \lambda) \neq 0$$

’ρα στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$r(A) = 3 \neq 4 = r(A|B)$$

και επομένως το σύστημα (Σ) δεν είναι συμβιβάσιμο.

(2) Έστω $\lambda = 1$. Τότε $r(A|B) = 3$ αφού

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

και όλες οι ελάσσονες οριζουσες τάξης 4 που την περιβάλλουν είναι 0. Συνεπώς έχουμε $r(A) = 3 = r(A|B)$ και άρα το (Σ) είναι συμβιβάσιμο. Έστω $\Lambda(\Sigma_0)$ ο υπόχωρος των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς (Σ_0) . Τότε θα έχουμε $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda(\Sigma_0) = 7 - r(A) = 7 - 3 = 4$ παραμέτρους στις λύσεις. Θέτουμε $x_3 = p$, $x_4 = q$, $x_5 = r$ και $x_6 = s$ όπου $p, q, r, s \in \mathbb{R}$. Τότε το (Σ) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p - q - r + s \\ x_2 = 1 - r + s \\ x_1 + 2x_2 + x_7 = 1 - p - q - 2r + 2s \end{cases}$$

Τότε αντικαθιστώντας την $x_2 = 1 - r + s$ στη πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $x_1 = -1 - p - q$ και από την τελευταία εξίσωση έπεται ότι $x_7 = 0$. Επομένως η γενική λύση του συστήματος (Σ) είναι

$$\begin{cases} x_1 = -1 - p - q \\ x_2 = 1 - r + s \\ x_3 = p \\ x_4 = q \\ x_5 = r \\ x_6 = s \\ x_7 = 0 \end{cases} \quad p, q, r, s \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 14. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} \alpha x + y + z = \alpha \\ x + \beta y + z = \beta \\ x + y + \gamma z = \gamma \end{cases}$$

Λύση. Ο πίνακας του συστήματος (Σ) είναι

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

και εύκολα υπολογίζουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$|A| = \alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις αναφορικά με τις τιμές που μπορεί να λάβει η βαθμίδα του πίνακα A .

- (1) $\boxed{\mathbf{r}(A) = 3}$ Αν η βαθμίδα του πίνακα A είναι ίση με 3 τότε ισοδύναμα έχουμε $|A| \neq 0$. Συνεπώς το σύστημα είναι Cramer και άρα έχουμε μοναδική λύση:

$$x = \frac{\alpha\beta\gamma - 2\beta\gamma + \beta + \gamma - \alpha}{|A|}, \quad y = \frac{\alpha\beta\gamma - 2\alpha\gamma + \alpha + \gamma - \beta}{|A|}, \quad z = \frac{\alpha\beta\gamma - 2\alpha\beta + \alpha + \beta - \gamma}{|A|}$$

- (2) $\boxed{\mathbf{r}(A) = 1}$ Ο πίνακας A έχει βαθμίδα ίση με 1 αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 1$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αρκεί να ελέγξουμε μόνο τις παραπάνω οριζουσες ώστε $\mathbf{r}(A) = 1$. Τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x + y + z = 1$ της οποίας η γενική λύση είναι:

$$x = 1 - \kappa - \lambda, \quad y = \kappa, \quad z = \lambda, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

- (3) $\boxed{\mathbf{r}(A) = 2}$ Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- (α) Αν $\alpha = \beta = \gamma = 1$ τότε από το (2) η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathbf{r}(A) = 1$, το οποίο είναι άτοπο.
 (β) Έστω $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \gamma \neq 1$ και ας υποθέσουμε ότι το (Σ) είναι συμβιβάσιμο. Τότε $\mathbf{r}(A|B) = 2 = \mathbf{r}(A)$ όπου ο επαυξημένος πίνακας του A είναι

$$(A|B) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \beta & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Τότε η οριζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

αφού το $\beta \neq 1$, και άρα όλες οι ελάχιστες οριζουσες που την περιβάλλουν θα πρέπει να είναι ίσες με 0, δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix}$$

Υπολογίζοντας τις παραπάνω οριζουσες έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2 = 0 \\ \alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma - 2\alpha\beta \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma - 2$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\alpha + \beta - \alpha\beta = 1 \implies (\alpha - 1)(1 - \beta) = 0 \implies \alpha = 1 \quad \text{ή} \quad \beta = 1$$

που είναι άτοπο από την υπόθεση μας. Άρα δεν γίνεται τα α, β και γ να είναι διάφορα του 1 όταν η βαθμίδα είναι $\mathbf{r}(A) = 2$.

- (γ) Έστω $\alpha = 1, \beta \neq 1, \gamma \neq 1$. Τότε

$$|A| = \alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2 \xrightarrow{\alpha=1} (\beta - 1)(\gamma - 1) = 0$$

και άρα $\beta = 1$ ή $\gamma = 1$, που είναι άτοπο από την υπόθεση που ξεκινήσαμε. Επομένως υποθέτοντας ότι μόνο ένα από τα α, β και γ είναι μηδέν τότε καταλήξαμε σε άτοπο. Παρόμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν $\alpha \neq 1, \beta = 1, \gamma \neq 1$ ή $\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \gamma = 1$.

- (δ) Υποθέτουμε ότι μόνο δύο από τα α, β και γ είναι ίσα με 1. Έστω $\alpha \neq 1, \beta = 1, \gamma = 1$. Τότε έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = \alpha \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 1 \neq 0$$

Για το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το εξής:

$$\begin{cases} \alpha x + y = \alpha - z \\ x + y = 1 - z \end{cases}$$

που είναι σύστημα Cramer ως προς τα x και y . Τότε εύκολα βρίσκουμε ότι η γενική λύση του συστήματος είναι: $x = 1$, $y = -\kappa$, $z = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Παρόμοια εργαζόμαστε αν $\alpha = 1$, $\beta \neq 1$, $\gamma = 1$ ή $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma \neq 1$.

Άσκηση 15. Να λυθεί το σύστημα ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$(\Sigma) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

Λύση. Ο πίνακας του συστήματος (Σ) είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

(1) Για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ έχουμε $|A| \neq 0$ και άρα το σύστημα είναι Cramer. Συνεπώς έχουμε μοναδική λύση:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \dots = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \dots = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix}}{-(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \dots = -\frac{4}{(\lambda + 1)}$$

(2) Έστω $\lambda = 1$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathbf{r}(A) = 2$ διότι υπάρχει μια οριζουσα τάξης δύο διαφορετική του μηδενός:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Επίσης, η βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$ είναι $r(A|B) = 2$ διότι

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Επομένως το σύστημα (Σ) είναι συμβιβάσιμο αφού $r(A) = r(A|B)$ και άρα το (Σ) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} x - y = 3 - z \\ x + y = 1 - z \end{cases} \implies 2x = 4 - 2z \implies x = 2 - z \implies y = -1$$

Θέτουμε $z = t \in \mathbb{R}$. Τότε η γενική λύση του (Σ) είναι

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$$

(3) Έστω $\lambda = -1$. Τότε έχουμε το σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

όπου παρατηρούμε από την πρώτη και τρίτη εξίσωση ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση 16. Πότε το σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} x + 5y - 2z + 6w = \kappa \\ 4x - 3y + 7z + 12w = \lambda \\ 5x - 44y + 35z - 6w = \mu \end{cases}$$

είναι συμβιβάσιμο; Αν το (Σ) είναι συμβιβάσιμο, ποιά είναι η γενική του λύση;

Λύση. Ο πίνακας και ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 \\ 4 & -3 & 7 & 12 \\ 5 & -44 & 35 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 & \kappa \\ 4 & -3 & 7 & 12 & \lambda \\ 5 & -44 & 35 & -6 & \mu \end{pmatrix}$$

Το σύστημα είναι συμβιβάσιμο αν και μόνο αν $r(A) = r(A|B)$. Η βαθμίδα του πίνακα A είναι $r(A) = 2$ διότι υπάρχει μια οριζουσα τάξης δύο διαφορετική του μηδενός:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$$

και οι οριζουσες τρίτης τάξης που την περιβάλλουν είναι μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 7 \\ 5 & -44 & 35 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & 12 \\ 5 & -44 & -6 \end{vmatrix}$$

Συνεπώς για να ισχύει $r(A) = r(A|B)$ θα πρέπει

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & \kappa \\ 4 & -3 & \lambda \\ 5 & -44 & \mu \end{vmatrix} = 0 \iff -\mu + 3\lambda - 7\kappa = 0$$

ρα το σύστημα είναι συμβιβάσιμο αν και μόνο αν:

$$-\mu + 3\lambda - 7\kappa = 0$$

Υποθέτουμε ότι: $-\mu + 3\lambda - 7\kappa = 0$. Τότε το (Σ) είναι συμβιβάσιμο και η γενική του λύση θα εξαρτάται από $4 - r(A) = 4 - 2$ παραμέτρους. Επειδή η ελάχιστοα οριζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$$

δίνουμε αυθαίρετες τιμές στα z, w : $z = r$ και $w = s$, και θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα με αγνώστους x, y :

$$(\Sigma') \quad \begin{cases} x + 5y = \kappa + 2r - 6s \\ 4x - 3y = \lambda - 7r - 12s \end{cases}$$

το οποίο είναι σύστημα Cramer ως προς x, y . Άρα η γενική του (Σ') λύση είναι:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \kappa + 2r - 6s & 5 \\ \lambda - 7r - 12s & -3 \end{vmatrix}}{-23} = \dots = \frac{-29r - 78s + 3\kappa + 5\lambda}{23}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \kappa + 2r - 6s \\ 4 & \lambda - 7r - 12s \end{vmatrix}}{-23} = \dots = \frac{15r + 12s - \lambda + 4\kappa}{23}$$

Άρα η γενική λύση του (Σ) , όταν $-\mu + 3\lambda - 7\kappa = 0$, είναι η εξής:

$$\begin{cases} x = \frac{-29r - 78s + 3\kappa + 5\lambda}{23} \\ y = \frac{15r + 12s - \lambda + 4\kappa}{23} \\ z = r \\ w = s \end{cases} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

Άσκηση 17. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}$$

Λύση. Ο πίνακας και ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (Σ) είναι οι εξής:

$$A = \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{pmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την οριζούσα του πίνακα A κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης, βλέπουμε εύκολα ότι:

$$|A| = -2abc$$

(1) Αν $a \neq 0$ και $b \neq 0$ και $c \neq 0$, τότε $|A| \neq 0$ ή ισοδύναμα $\mathbf{r}(A) = 3$, το σύστημα (Σ) είναι σύστημα Cramer και άρα έχει μοναδική λύση, η οποία είναι η εξής:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix}}{-2abc} = \dots = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix}}{-2abc} = \dots = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} b & a & c \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}}{-2abc} = \dots = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(2) Υποθέτουμε ότι $a = 0$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- (α) Αν $b = 0$, τότε, από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι $c = 0$ και άρα θα έχουμε $a = b = c = 0$. Τότε $A = (A|B) = O$, και προφανώς το σύστημα (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από τρεις παραμέτρους:

$$x = r, \quad y = s, \quad z = t, \quad \text{όπου } r, s, t \in \mathbb{R}$$

- (β) Αν $b \neq 0$, τότε αναγκαστικά θα έχουμε $c \neq 0$ διότι διαφορετικά από την δεύτερη εξίσωση θα είχαμε $b = 0$ και αυτό είναι άτοπο. Άρα $a = 0$ και $b \neq 0 \neq c$. Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & b \\ 0 & c & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{c}\Gamma_2, \Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{c}\Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{b}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c/b \\ 1 & 0 & 0 & b/c \\ 0 & 1 & b/c & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c/b \\ 0 & 0 & 0 & b/c - c/b \\ 0 & 1 & b/c & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma') \begin{cases} x = \frac{c}{b} \\ 0 = \frac{b}{c} - \frac{c}{b} \\ y + \frac{b}{c}z = 0 \end{cases}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ) .

- (i) Αν $b/c \neq c/b$, δηλαδή αν $b^2 \neq c^2$ ή ισοδύναμα αν $b \neq c$ και $b \neq -c$, τότε το σύστημα (Σ') , άρα και το (Σ) , είναι αδύνατο, όπως προκύπτει από την δεύτερη εξίσωση του (Σ') .
(ii) Αν $b/c = c/b$, δηλαδή αν $b^2 = c^2$ ή ισοδύναμα αν $b = c$ ή $b = -c$, τότε θα έχουμε:

- Αν $b = c$. Τότε ο πίνακας $(A|B)$ και το σύστημα (Σ) παίρνουν τη μορφή

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies (\Sigma) \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = r \\ z = -r \end{cases} \quad \text{όπου } r \in \mathbb{R}$$

- Αν $b = -c$. Τότε ο πίνακας $(A|B)$ και το σύστημα (Σ) παίρνουν τη μορφή

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \implies (\Sigma) \begin{cases} x = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = r \\ z = r \end{cases} \quad \text{όπου } r \in \mathbb{R}$$

(3) Η περίπτωση $b = 0$ αντιμετωπίζεται ανάλογα.

(4) Η περίπτωση $c = 0$ αντιμετωπίζεται ανάλογα.

Συνοψίζοντας, θα έχουμε:

- (1) Αν όλα τα a, b, c είναι μη-μηδενικά, τότε το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση.
- (2) Αν όλα τα a, b, c είναι ίσα με μηδέν, τότε το σύστημα (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από τρεις παραμέτρους.
- (3) Αν δύο από τα a, b, c είναι ίσα με μηδέν και το τρίτο είναι μη-μηδενικό, τότε το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.
- (4) Αν δύο από τα a, b, c είναι μη-μηδενικά και το τρίτο είναι ίσο με μηδέν, τότε το σύστημα (Σ) :
 - (α) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο αν τα δύο μη-μηδενικά στοιχεία είναι ίσα ή αντίθετα,
 - (β) είναι αδύνατο αν τα δύο μη-μηδενικά στοιχεία δεν είναι ίσα ή αντίθετα.

Άσκηση 18. Αν $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$, να ληθεί το ακόλουθο σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \kappa \\ x + y + \lambda^2 z = \kappa^2 \end{cases}$$

Λύση. Ο πίνακας A και ο επαυξημένος πίνακας $(A|B)$ του συστήματος (Σ) είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \kappa \\ 1 & 1 & \lambda^2 & \kappa^2 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε πρώτα την ορίζουσα του πίνακα A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

(1) Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$, τότε το (Σ) είναι ένα σύστημα Cramer και επομένως έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \kappa & \lambda & 1 \\ \kappa^2 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix}}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)} = \dots = \frac{\lambda^2 - 1 - (\kappa^2 - 1) - (\kappa - 1)(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \kappa & 1 \\ 1 & \kappa^2 & \lambda^2 \end{vmatrix}}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)} = \dots = \frac{\kappa - 1}{\lambda - 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \kappa \\ 1 & 1 & \kappa^2 \end{vmatrix}}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)} = \dots = -\frac{(\kappa - 1)(\lambda - 2)}{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)}$$

(2) Έστω $\lambda = 1$. Τότε το σύστημα (Σ) είναι το:

$$(\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = \kappa \\ x + y + z = \kappa^2 \end{cases}$$

(α) Αν $\kappa \neq 1$, τότε προφανώς το (Σ) είναι αδύνατο.

(β) Αν $\kappa = 1$, τότε το (Σ) εκφυλίζεται στην εξίσωση: $x + y + z = 1$ και άρα το (Σ) έχει άπειρες λύσεις:

$$\begin{cases} x = 1 - r - s \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(3) Έστω $\lambda = -1$. Τότε το σύστημα (Σ) είναι το:

$$(\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = \kappa \\ x + y + z = \kappa^2 \end{cases}$$

Ο πίνακας και ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \kappa \\ 1 & 1 & 1 & \kappa^2 \end{pmatrix}$$

Προφανώς $r(A) = 2$ διότι ο πίνακας A έχει την μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

και η μοναδική ελάχισσυνα ορίζουσα τάξης 3 είναι η ορίζουσα του $A = 0$. Για να είναι το (Σ) συμβιβαστό, θα πρέπει $r(A|B) = 2$. Προφανώς αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \kappa \\ 1 & 1 & \kappa^2 \end{vmatrix} = -2(\kappa^2 - 1) = 0$$

Άρα:

(α) Αν $\kappa \neq 1$ και $\kappa \neq -1$, τότε προφανώς $r(A|B) = 3 \neq 2 = r(A)$ και επομένως το (Σ) είναι αδύνατο.

(β) Έστω $\kappa = 1$. Τότε το σύστημα (Σ) είναι το

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

του οποίου η γενική λύση είναι:

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = 0 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(γ) Έστω $\kappa = -1$. Τότε το σύστημα (Σ) είναι το

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

του οποίου η γενική λύση είναι:

$$\begin{cases} x = -1 - r \\ y = 1 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άσκηση 19. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το ακόλουθο σύστημα

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y + \lambda z = \lambda \\ \lambda x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = \lambda \end{cases}$$

Λύση. Ο πίνακας A και ο επαυξημένος πίνακας $(A|B)$ του συστήματος (Σ) είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τη βαθμίδα του A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 - \Gamma_2]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

Προφανώς $r(A) = r(A')$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Αν $\lambda = 1$, τότε ο πίνακας A' είναι

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και προφανώς $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A') = 1$. Από την άλλη πλευρά:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και προφανώς $\mathbf{r}(A|B) = 1$. Άρα το (Σ) είναι συμβιβαστό, το (Σ) εκφυλίζεται στην εξίσωση $x+y+z = 1$, και η γενική λύση του είναι:

$$\begin{cases} x = 1 - r - s \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(2) Έστω $\lambda \neq 1$. Τότε θεωρούμε τον πίνακα A' :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{1-\lambda}\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{1-\lambda}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''$$

Προφανώς τότε: $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A') = \mathbf{r}(A'')$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Αν $\lambda \neq -1$, τότε ο πίνακας A'' έχει μια μη-μηδενική ελάσσονα οριζούσα τάξης 3, την

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = 1 + \lambda \neq 0$$

και δεν υπάρχει ελάσσονα οριζούσα τάξης 4. Άρα $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A'') = 3$. Επομένως το (Σ) είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν $\mathbf{r}(A|B) = 3$. Υπολογίζουμε τη βαθμίδα του $(A|B)$, χρησιμοποιώντας ότι $\lambda \neq 1$:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ \lambda & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{1-\lambda}\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{1-\lambda}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''' \xrightarrow{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 - \Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''''$$

Προφανώς $r(A) = r(A') = r(A'') = r(A''')$. Άρα το (Σ) είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν $r(A|B) = r(A''') = 3$. Η βαθμίδα του A''' είναι 3 διότι ο A''' περιέχει την μη-μηδενική ελάχιστη οριζούσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda + 1 \neq 0$$

Άρα το (Σ) είναι συμβιβαστό και, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις προηγηθείσες στοιχειώδεις πράξεις στους γραμμές του $(A|B)$, είναι ισοδύναμο με το σύστημα (με επαυξημένο πίνακα τον A'''):

$$(\Sigma') \quad \begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ y = -1 \\ \lambda y + (\lambda + 1)z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x - \lambda + \lambda z = 1 \\ y = -1 \\ -\lambda + (\lambda + 1)z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x + \lambda z = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ (\lambda + 1)z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Επειδή $\lambda + 1 \neq 0$, θα έχουμε ισοδύναμα:

$$\implies \begin{cases} x + \lambda z = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση, την παραπάνω.

(β) Αν $\lambda = -1$, τότε το (Σ) είναι το

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y - z = -1 \\ -x - y + z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad (\Sigma) \quad \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι συμβιβαστό (είναι σύστημα Cramer ως προς x, y) εύκολα βλέπουμε ότι η γενική του λύση είναι:

$$\begin{cases} x = r \in \mathbb{R} \\ y = -1 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Συνοψίζοντας:

(1) Αν $\lambda = 1$, τότε το (Σ) είναι συμβιβαστό και η γενική λύση του είναι:

$$\begin{cases} x = 1 - r - s \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(2) Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$, τότε το (Σ) είναι συμβιβαστό και έχει μοναδική λύση:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

(3) Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda = -1$, τότε το (Σ) είναι συμβιβαστό και η γενική λύση του είναι:

$$\begin{cases} x = r \in \mathbb{R} \\ y = -1 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άσκηση 20. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$, να ληθεί το ακόλουθο σύστημα

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$$

Λύση. Ο πίνακας A του συστήματος (Σ) είναι

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

και εύκολα υπολογίζουμε ότι η ορίζουσα τού πίνακα A είναι

$$|A| = abc - a - b - c + 2$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις αναφορικά με τις τιμές που μπορεί να λάβει η βαθμίδα του πίνακα A .

(1) $\boxed{r(A) \neq 0}$ Προφανώς $r(A) \neq 0$ διότι $A \neq 0$.

(2) $\boxed{r(A) = 3}$ Η βαθμίδα του πίνακα A είναι ίση με 3 αν και μόνον αν $|A| \neq 0$. Σ' αυτή την περίπτωση το σύστημα είναι Cramer και άρα έχουμε μοναδική λύση:

$$\begin{cases} x = \frac{(b-1)(c-1)}{|A|} \\ y = \frac{(a-1)(c-1)}{|A|} \\ z = \frac{(a-1)(b-1)}{|A|} \end{cases}$$

(3) $\boxed{r(A) = 1}$ Ο πίνακας A έχει βαθμίδα ίση με 1 αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 1$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αρκεί να ελέγξουμε μόνο τις παραπάνω ορίζουσες ώστε $r(A) = 1$. Τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $x + y + z = 1$ της οποίας η γενική λύση είναι:

$$\begin{cases} x = 1 - \kappa - \lambda \\ y = \kappa \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(4) $\boxed{r(A) = 2}$ Ο πίνακας A έχει βαθμίδα 2 αν και μόνον αν υπάρχει μια μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 2 στον A και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης 3 του A είναι ίσες με μηδέν. Η μοναδική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 3 του A είναι η $|A|$, και άρα θα πρέπει $|A| = 0$. Οι δυνατές ελάσσονες ορίζουσες τάξης 2 στον A είναι:

$$\begin{aligned} 1. \Delta_1 &= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = ab - 1, & 2. \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & c \end{vmatrix} = ac - 1, & 3. \Delta_3 &= \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & c \end{vmatrix} = bc - 1 \\ 4. \Delta_4 &= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1, & 5. \Delta_5 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = 1 - b, & 6. \Delta_6 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{vmatrix} = c - 1 \end{aligned}$$

Θα εξετάσουμε κάθε μια εκ των παραπάνω έξι περιπτώσεων ξεχωριστά. Οι τρεις πρώτες περιπτώσεις είναι παρόμοιες, και επίσης οι τρεις τελευταίες περιπτώσεις είναι παρόμοιες.

(α) Αν $|A| = 0$ και $\Delta_1 = ab - 1 \neq 0$, τότε $r(A) = 2$ και επομένως το (Σ) είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν $r(A|B) = 2$ αν και μόνον αν όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης 3 στον $(A|B)$ οι οποίες πλαισιώνουν την Δ_1 είναι ίσες με μηδέν. Οι μόνες ελάσσονες ορίζουσες τάξης 3 που πλαισιώνουν την Δ_1 στον επαυξημένο πίνακα $(A|B)$ είναι οι:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)$$

Άρα θα πρέπει:

$$(a = 1 \quad \text{και} \quad abc - a - b - c + 2 = 0) \quad \text{ή} \quad (b = 1 \quad \text{και} \quad abc - a - b - c + 2 = 0) \implies$$

$$\begin{aligned} \implies & (a = 1 \text{ και } bc - 1 - b - c + 2 = 0) \text{ ή } (b = 1 \text{ και } ac - a - 1 - c + 2 = 0) \implies \\ \implies & (a = 1 \text{ και } (b-1)(c-1) = 0) \text{ ή } (b = 1 \text{ και } (a-1)(c-1) = 0) \implies \\ & \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \implies \\ & \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Η πρώτη περίπτωση απορρίπτεται διότι αν $a = 1 = b$, τότε $\Delta_1 = ab - 1 = 0$ το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, αν $|A| = \Delta_1 = ab - 1 = 0$, τότε το (Σ) είναι συμβιβαστό αν και μόνον αν ισχύει μια εκ των δύο τελευταίων παραπάνω περιπτώσεων. Επειδή, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα, κάθε μια εκ των παραπάνω δύο τελευταίων περιπτώσεων συνεπάγει ότι $|A| = 0$, έπεται ότι:

$$\Delta_1 = ab - 1 \neq 0 \implies \mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(A|B) \iff \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Προφανώς αν $a = 1 = c$, και $b \neq 1$, τότε: $ab - 1 = b - 1 \neq 0$ και επομένως $\Delta_1 = ab - 1 \neq 0$. Παρόμοια, αν $b = 1 = c$ και $a \neq 1$, τότε $\Delta_1 = ab - 1 = a - 1 \neq 0$. Επομένως δείξαμε ότι:

$$\Delta_1 \neq 0 \text{ και } \mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(A|B) \iff \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 1 \\ c = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} a \neq 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Άρα:

(i) Αν $a = 1 = c$ και $b \neq 1$, τότε το (Σ) είναι συμβιβαστό, έχει τη μορφή

$$(\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \text{ δηλαδή } (\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \end{cases}$$

και η γενική του λύση είναι

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = 0 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(ii) Αν $b = 1 = c$ και $a \neq 1$, τότε το (Σ) είναι συμβιβαστό, έχει τη μορφή

$$(\Sigma) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \text{ δηλαδή } (\Sigma) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

και η γενική του λύση είναι

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - r \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(β) Παρόμοια εργαζόμενοι:

$$\Delta_2 \neq 0 \text{ και } \mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(A|B) \iff \begin{cases} a \neq 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c \neq 1 \end{cases}$$

Άρα:

(i) Αν $b = 1 = c$ και $a \neq 1$, τότε το (Σ) είναι συμβιβαστό, έχει τη μορφή

$$(\Sigma) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{δηλαδή} \quad (\Sigma) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

και η γενική του λύση είναι

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - r \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(ii) Αν $a = 1 = b$ και $c \neq 1$, τότε το (Σ) είναι συμβιβαστό, έχει τη μορφή

$$(\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases} \quad \text{δηλαδή} \quad (\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$$

και η γενική του λύση είναι

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

(γ) Παρόμοια εργαζόμενοι:

$$\Delta_3 \neq 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(A|B) \quad \iff \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c \neq 1 \end{cases} \quad \eta \quad \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Άρα:

(i) Αν $a = 1 = b$ και $c \neq 1$, τότε το (Σ) είναι συμβιβαστό, έχει τη μορφή

$$(\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases} \quad \text{δηλαδή} \quad (\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$$

και η γενική του λύση είναι

$$\begin{cases} x = r \in \mathbb{R} \\ y = 1 - r \\ z = 0 \end{cases}$$

(ii) Αν $a = 1 = c$ και $b \neq 1$, τότε το (Σ) είναι συμβιβαστό, έχει τη μορφή

$$(\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{δηλαδή} \quad (\Sigma) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \end{cases}$$

και η γενική του λύση είναι

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = 0 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(δ) Παρόμοια εργαζόμενοι:

$$\Delta_4 \neq 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{r}(A) = 2 = \mathbf{r}(A|B) \quad \iff \quad \begin{cases} a \neq 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Αυτή η περίπτωση έχει αναλυθεί στο (α').

(ε) Παρόμοια εργαζόμενοι:

$$\Delta_5 \neq 0 \text{ και } r(A) = 2 = r(A|B) \iff \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Αυτή η περίπτωση έχει αναλυθεί στο (α').

(ς) Παρόμοια εργαζόμενοι:

$$\Delta_6 \neq 0 \text{ και } r(A) = 2 = r(A|B) \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c \neq 1 \end{cases}$$

Αυτή η περίπτωση έχει αναλυθεί στο (β').

Συνοψίζουμε: Το σύστημα (Σ) είναι συμβιβάσιμο αν και μόνον αν ισχύει μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) $\boxed{abc - a - b - c + 2 \neq 0}$, και τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση:

$$\begin{cases} x = \frac{(b-1)(c-1)}{abc - a - b - c + 2} \\ y = \frac{(a-1)(c-1)}{abc - a - b - c + 2} \\ z = \frac{(a-1)(b-1)}{abc - a - b - c + 2} \end{cases}$$

(2) $\boxed{a = b = c = 1}$, και τότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις, οι εξαρτώνται από δύο παραμέτρους, και οποίες είναι της μορφής:

$$\begin{cases} x = 1 - r - s \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(3) $\boxed{\begin{cases} a \neq 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}}$, και τότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις, οι εξαρτώνται από μια παράμετρο, και οποίες είναι της μορφής:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - r \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(4) $\boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b \neq 1 \\ c = 1 \end{cases}}$, και τότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις, οι εξαρτώνται από μια παράμετρο, και οποίες είναι της μορφής:

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = 0 \\ z = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(5) $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c \neq 1 \end{cases}$, και τότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις, οι εξαρτώνται από μια παράμετρο, και οποίες είναι της μορφής:

$$\begin{cases} x = 1 - r \\ y = r \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$