ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Λυση Προχειρης Δοκιμασιας 1

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html

Παρασκευή 15 Οκτωβρίου 2021

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τον πίνακα*

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2019^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Να δειχθεί ότι*

$$A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$$

2. *Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A(x)$ είναι αντιστρέψιμος.*

3. *Να υπολογιστεί ο πίνακας $A(x)^{-1}$.*

4. *Να υπολογιστεί η n-οστή δύναμη του πίνακα $A(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

5. *Να υπολογιστεί ο πίνακας*

$$\big(A(x) + A(y)\big)^3$$

Λύση. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} 2019^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2019^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2019^x \cdot 2019^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2019^{(x+y)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= A(x+y) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$A(0) = \begin{pmatrix} 2019^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Επομένως, έχουμε

$$A(x)A(-x) = A(x + (-x)) = A(0) = I_3 = A(0) = A\big((-x) + x\big) = A(-x)A(x)$$

και άρα, $\forall x \in \mathbb{R}$, ο πίνακας $A(x)$ είναι αντιστρέψιμος με

$$A(x)^{-1} = A(-x)$$

- *Αν* $n \geq 0$, *τότε επειδή* $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, *έπεται ότι* $A(x)^2 = A(x) \cdot A(x) = A(x+x) = A(2x)$. *Επαγωγικά εύκολα βλέπουμε ότι* $A(x)^n = A(nx)$. *Πραγματικά, έστω ότι* $A(x)^n = A(nx)$, *για κάποιο* $n \geq 2$. *Τότε*

$$A(x)^{n+1} = A(x)^n \cdot A(x) = A(nx) \cdot A(x) = A(nx+x) = A\big((n+1)x\big)$$

Άρα από την Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής έπεται ότι πραγματικά, $\forall n \geq 0$: $A(x)^n = A(nx)$.

- *Αν* $n \leq -1$, *τότε χρησιμοποιώντας ότι* $A(x)^{-1} = A(-x)$, *θα έχουμε*[1]

$$A(x)^{-n} = (A(x)^{-1})^n = A(-x)^n = A(-nx)$$

Επομένως θα έχουμε

$$A(x)^n = A(nx), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Επειδή $A(x) \cdot A(y) = A(x+y) = A(y+x) = A(y) \cdot A(x)$, *έπεται ότι*[2]*:*

$$\big(A(x) + A(y)\big)^3 = A(x)^3 + 3A(x)^2 A(y) + 3A(x)A(y)^2 + A(y)^3$$

Επειδή $A(x)^n = A(nx)$, *από την παραπάνω σχέση θα έχουμε:*

$$\big(A(x)+A(y)\big)^3 = A(3x)+3A(2x)A(y)+3A(x)A(2y)+A(3y) = A(3x)+3A(2x+y)+3A(x+2y)+A(3y) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2019^{3x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2019^{2x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2019^{x+2y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2019^{3y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2019^{3x} + 3\big(2019^{2x+y} + 2019^{x+2y}\big) + 2019^{3y} & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 6(x+y) \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

---

[1] Εδώ χρησιμοποιούμε ότι αν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, και άρα υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1}, τότε ορίζονται και οι αρνητικές δυνάμεις του A ως εξής:

$$\forall n \leq 0: \quad A^{-n} = (A^{-1})^n$$

[2] Εδώ χρησιμοποιούμε ότι αν A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες ίδιου μεγέθους και ισχύει ότι $AB = BA$, τότε:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$