ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Λυση Προχειρης Δοκιμασιας 2

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html

Παρασκευή 29 Οκτωβρίου 2021

Πρόχειρη Δοκιμασία. (1) *Αν $\lambda \in \mathbb{K}$, να βρεθεί η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Ποιά είναι η κανονική μορφή του A και ποιά η βαθμίδα του;

(2) *Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος; Στην περίπτωση κατά την οποία ο A είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο αντίστροφος A^{-1} του A με χρήση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών του A.*

(3) *Να λυθεί το σύστημα*

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

Λύση. • *Προσδιορίζουμε ταυτόχρονα την ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A και τον αντίστροφό του, σε περίπτωση κατά την οποία ο A είναι αντιστρέψιμος. Θα έχουμε:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_2 \to \frac{1}{5}\Gamma_2]{\Gamma_1 \to -\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \lambda+3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - (\lambda+3)\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\frac{1+2\lambda}{5} & -\frac{\lambda+3}{5} & 1 \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_3 \to -\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 3\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \frac{1+2\lambda}{5} & \frac{\lambda+3}{5} & -1 \end{array}\right) \qquad (*)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) *Υποθέτουμε ότι $\lambda = 0$. Τότε ο τελευταίος πίνακας $(*)$ παραπάνω είναι*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{array}\right)$$

Προφανώς τότε η ισχυρά Γ*-κλιμακωτή μορφή του πίνακα* A *είναι ο πίνακας*

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή $\Gamma(A) \neq I_3$*, έπεται ότι ο πίνακας* A *δεν είναι αντιστρέψιμος, και προφανώς η βαθμίδα του πίνακα* A *είναι ίση με*

$$\mathbf{r}(A) = 2$$

Για την κανονική μορφή του πίνακα A*, θα έχουμε:*

$$\Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto[\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_2]{\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{K}(A)$$

(2) *Υποθέτουμε ότι* $\lambda \neq 0$*. Τότε ο τελευταίος πίνακας* $(*)$ *παραπάνω είναι*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \frac{1+2\lambda}{5} & \frac{\lambda+3}{5} & -1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \to \frac{1}{\lambda}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+2\lambda}{5\lambda} & \frac{\lambda+3}{5\lambda} & \frac{-1}{\lambda} \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1-\lambda}{5\lambda} & \frac{2\lambda-3}{5\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{5\lambda} & \frac{-3}{5\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+2\lambda}{5\lambda} & \frac{\lambda+3}{5\lambda} & \frac{-1}{\lambda} \end{array}\right) = (I_3 \,|\, X)$$

Τότε η ισχυρά γ*-κλινακωτή μορφή τοψ* A *είναι ο μοναδιαίος πίνακας:* $\Gamma(A) = I_3$*. Επομένως ο πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας*

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} \frac{-1-\lambda}{5\lambda} & \frac{2\lambda-3}{5\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{-1}{5\lambda} & \frac{-3}{5\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1+2\lambda}{5\lambda} & \frac{\lambda+3}{5\lambda} & \frac{-1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

Προφανώς θα έχουμε

$$\mathsf{K}(A) = \Gamma(A) = I_3 \quad \text{και} \quad \mathbf{r}(A) = 3$$

- *Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος*

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & \lambda x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

είναι ο πίνακας

$$(A \,|\, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα και λαμβάνοντας υπόψιν τους παραπάνω υπολογισμούς, θα έχουμε:

$$(A \,|\, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & -11 \\ 0 & \lambda+3 & 3 & -1 \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_2 \to \frac{1}{5}\Gamma_2]{\Gamma_1 \to -\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 0 & \lambda+3 & 3 & -1 \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - (\lambda+3)\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{11\lambda+28}{5} \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_3 \to -\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 3\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \lambda & -\frac{11\lambda+28}{5} \end{array}\right) \tag{$**$}$$

(3) *Υποθέτουμε ότι* $\lambda = 0$. *Τότε ο πίνακας* $(**)$ *παραπάνω είναι*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{28}{5} \end{array}\right)$$

ο οποίος είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma') \qquad \begin{cases} x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & = & -\frac{8}{5} \\ 0x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -\frac{11}{5} \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & -\frac{28}{5} \end{cases}$$

και γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) *είναι ισοδύναμο με το σύστημα* (Σ'). *Επειδή το σύστημα* (Σ') *είναι προφανώς αδύνατο, έπεται ότι το σύστημα* (Σ) *είναι αδύνατο.*

(4) *Υποθέτουμε ότι* $\lambda \neq 0$. *Τότε ο πίνακας* $(**)$ *παραπάνω είναι*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \lambda & -\frac{11\lambda+28}{5} \end{array}\right) \xmapsto{\Gamma_3 \to \frac{1}{\lambda}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11\lambda+28}{5\lambda} \end{array}\right) \xmapsto[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3\lambda+28}{5\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{5\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11\lambda+28}{5\lambda} \end{array}\right)$$

και ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma'') \begin{cases} x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & \frac{3\lambda+28}{5\lambda} \\ 0x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & = & \frac{28}{5\lambda} \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & = & -\frac{11\lambda+28}{5\lambda} \end{cases}$$

και γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) *είναι ισοδύναμο με το σύστημα* (Σ''). *Προφανώς το σύστημα* (Σ'') *έχει μοναδική λύση*

$$x_1 = \frac{3\lambda+28}{5\lambda}, \qquad x_2 = \frac{28}{5\lambda}, \qquad x_3 = -\frac{11\lambda+28}{5\lambda}$$

η οποία είναι και η μοναδική λύση του (Σ).

Συνοψίζουμε:

1. *Η ισχυρά* γ*-κλιμακωτή μορφή και η κανονική μορφή του πίνακα* A *είναι*

$$\begin{cases} \Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{αν} \quad \lambda = 0 \\ \Gamma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{αν} \quad \lambda \neq 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} \mathsf{K}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{αν} \quad \lambda = 0 \\ \mathsf{K}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{αν} \quad \lambda \neq 0 \end{cases}$$

και η βαθμίδα του A *είναι:*

$$\begin{cases} \mathbf{r}(A) = 2, & \text{αν} \quad \lambda = 0 \\ \mathbf{r}(A) = 3, & \text{αν} \quad \lambda \neq 0 \end{cases}$$

2. *Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $\lambda \neq 0$. Αν $\lambda \neq 0$, τότε:*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1-\lambda}{5\lambda} & \frac{2\lambda-3}{5\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{-1}{5\lambda} & \frac{-3}{5\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1+2\lambda}{5\lambda} & \frac{\lambda+3}{5\lambda} & \frac{-1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

3. *Το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο αν $\lambda = 0$ και έχει μοναδική λύση αν $\lambda \neq 0$. Αν $\lambda \neq 0$, τότε η μοναδική λύση του (Σ) είναι*

$$x_1 = \frac{3\lambda + 28}{5\lambda}, \quad x_2 = \frac{28}{5\lambda}, \quad x_3 = -\frac{11\lambda + 28}{5\lambda}$$