

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΛΥΣΗ ΠΡΟΧΕΙΡΗΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ 3

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 5 Νοεμβρίου 2021

Πρόχειρη Δοκιμασία. Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, να υπολογιστεί η οριζούσα του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση. (1) Αν $n = 1$, τότε $A = (0)$ και άρα $|A| = 0$.

Αν $n = 2$, τότε θα έχουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Αν $n \geq 3$, θα έχουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i - \Gamma_{i+1} \\ 2 \leq i \leq n-1}]{\substack{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία} \\ \text{της πρώτης στήλης}}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία} \\ \text{της πρώτης στήλης}}} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{n+1}(n-1) \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Ορίζουσα κάτω τριγωνικού} \\ \hline \hline (n-2) \times (n-2) \text{ πίνακα} \end{array}$$

$$(-1)^{n+1}(n-1)x^{n-2}$$

Επομένως, αν $n \geq 3$:

$$|A| = (-1)^{n+1}(n-1)x^{n-2}$$

Συνοψίζοντας θα έχουμε:

$$|A| = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 1 \\ (-1)^{n+1}(n-1)x^{n-2}, & \text{αν } n \geq 2 \end{cases}$$