

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΛΥΣΗ ΠΡΟΧΕΙΡΗΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ 4

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 12 Νοεμβρίου 2021

Πρόχειρη Δοκιμασία. Στο σύνολο $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ των θετικών πραγματικών αριθμών ορίζουμε πράξεις ως εξής:

(a) Πρόσθεση:

$$\oplus : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \oplus y := xy$$

όπου $((xy))$ συμβολίζει τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών.

(b) Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός:

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad \lambda \odot x := x^\lambda$$

1. Να εξετάσετε αν με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο \mathbb{R}^+ αποτελεί \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο.
2. Αν το σύνολο \mathbb{R}^+ είναι \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος, να προσδιορισθούν όλοι οι υπόχωροί του.
3. Αν το σύνολο \mathbb{R}^+ είναι \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο και $x \in \mathbb{R}^+$, να περιγραφεί ο υπόχωρος $\langle x \rangle$ του \mathbb{R}^+ .
4. Ποιά είναι η σχέση μεταξύ των διανυσματικών χώρων¹ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$;

Λύση. 1. Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ και $r, s \in \mathbb{R}$. Τότε:

(α) $(x \oplus y) \oplus z = (xy) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x(y \oplus z) = x \oplus (y \oplus z)$.

(β) $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$.

(γ) Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει ένα στοιχείο $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^+$ έτσι ώστε $x \oplus \mathbf{o} = x = \mathbf{o} \oplus x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$. 'ρα

$$x \oplus \mathbf{o} = x \iff x\mathbf{o} = x \iff \mathbf{o} = 1$$

διότι το $x \neq 0$. Συνεπώς, το μηδενικό διάνυσμα είναι το στοιχείο $\mathbf{o} = 1$.

(δ) Θεωρούμε στοιχείο $x \in \mathbb{R}^+$. Θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει ένα στοιχείο $y \in \mathbb{R}^+$ έτσι ώστε: $x \oplus y = \mathbf{o} = y \oplus x$. Επειδή από το προηγούμενο αξίωμα, $\mathbf{o} = 1$, θα έχουμε: $x \oplus y = 1 \iff xy = 1$ και αφού $x \in \mathbb{R}^+$ έπεται ότι $y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$. Πράγματι, έχουμε

$$x \oplus \frac{1}{x} = x \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} x = \frac{1}{x} \oplus x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$. 'ρα, το αντίθετο του διανύσματος $x \in \mathbb{R}^+$ ως προς την πρόσθεση \oplus είναι το διάνυσμα $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^+$.

(ζ) $r \odot (x \oplus y) = r \odot (xy) = (xy)^r = x^r y^r = x^r \oplus y^r = (r \odot x) \oplus (r \odot y)$.

(η) $(r + s) \odot x = x^{r+s} = x^r x^s = x^r \oplus x^s = (r \odot x) \oplus (s \odot x)$.

¹Οι πράξεις $+$ και \cdot συμβολίζουν τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών.

$$(\theta) \quad r \odot (s \odot x) = r \odot (x^s) = (x^s)^r = x^{sr} = (sr) \odot x.$$

$$(\iota) \quad 1 \odot x = x^1 = x.$$

Επομένως, η τριάδα $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο υπεράνω του \mathbb{R} .

- 2.** Γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\{1\}$ και όλος ο χώρος \mathbb{R}^+ είναι υπόχωροι του \mathbb{R}^+ . Έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^+$ ένας υπόχωρος του \mathbb{R}^+ έτσι ώστε $\mathcal{V} \neq \{1\}$, δηλαδή ο \mathcal{V} δεν είναι ο μηδενικός υπόχωρος του \mathbb{R}^+ . Ήρα υπάρχει ένα $x \in \mathcal{V}$ με $x \neq 1$. Έστω $k \in \mathbb{R}^+$. Τότε έχουμε

$$k = x^{\log_x k} = \log_x k \odot x \in \mathcal{V}$$

αφού $\log_x k \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathcal{V}$. Συνεπώς έχουμε ότι $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathcal{V}$ και άρα $\mathcal{V} = \mathbb{R}^+$. Επομένως οι μόνοι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ είναι το $\{1\}$ και όλος ο χώρος \mathbb{R}^+ .

- 3.** Αν $x = 1$, δηλαδή x είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε προφανώς $\langle x \rangle = \{1\}$. Αν $x \neq 1$, τότε από το μέρος **2**. έπεται ότι $\langle x \rangle = \mathbb{R}^+$. Επομένως κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα του \mathbb{R} -διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^+ παράγει τον \mathbb{R}^+ .
- 4.** Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = e^x$$

η οποία γνωρίζουμε ότι είναι «1-1» και «επί» με αντίστροφη τη λογαριθμική συνάρτηση

$$g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \log_e(x)$$

Τότε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, θα έχουμε:

$$f(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = e^x \oplus e^y = f(x) \oplus f(y)$$

$$f(r \cdot x) = e^{r \cdot x} = (e^x)^r = f(x)^r = r \odot f(x)$$

Με άλλα λόγια οι \mathbb{R} -διανυσματικοί χώροι \mathbb{R} και \mathbb{R}^+ είναι σε «1-1» και «επί» αντιστοιχία μέσω μιας απεικόνισης η οποία² στέλνει τις πράξεις πρόσθεσης $+$ και βαθμωτού πολλαπλασιασμού \cdot στον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, στις αντίστοιχες πράξεις πρόσθεσης \oplus και βαθμωτού πολλαπλασιασμού \odot στον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$.

²Όπως θα δούμε αργότερα μια τέτοια απεικόνιση καλείται ισομορφισμός και μας επιτρέπει να ταυτίζουμε τους εμπλεκόμενους διανυσματικούς χώρους.