

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

## ΛΥΣΗ ΠΡΟΧΕΙΡΗΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ 5

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 19 Νοεμβρίου 2021

**Πρόχειρη Δοκιμασία.** Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό  $k$  και τα διανύσματα του  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{x} = (k, 1, -1), \quad \vec{y} = (0, k, 1), \quad \vec{z} = (1, k, -1)$$

- (1) Να βρεθεί για ποιές τιμές του  $k \in \mathbb{R}$  τα διανύσματα  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- (2) Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$$

- (3) Να συμπληρωθεί η βάση που βρέθηκε στο (2) σε μια βάση του  $\mathbb{R}^3$ .
- (4) Για τις τιμές του  $k$  για τις οποίες τα  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και άρα βάση του  $\mathbb{R}^3$ , να βρεθούν οι συνιστώσες του  $(1, 1, 1)$  ως προς αυτή τη βάση.

**Λύση.** 1. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος προκύπτει από τις συνιστώσες των διανυσμάτων  $\vec{x}, \vec{y},$  και  $\vec{z}$ . Γνωρίζουμε τότε ότι τα διανύσματα  $\vec{x}, \vec{y},$  και  $\vec{z}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνον αν ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν και μόνον αν:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix} = -2k^2 + k + 1 = -2(k-1)\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

Επομένως

$$|A| = 0 \implies k = 1 \quad \eta \quad k = -\frac{1}{2}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\text{τα διανύσματα } \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητα} \iff k \neq 1 \text{ και } k \neq -\frac{1}{2}$$

2. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- (α) Αν  $k \neq 1$  και  $k \neq -\frac{1}{2}$ , τότε τα διανύσματα  $\vec{x}, \vec{y},$  και  $\vec{z}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του  $\mathcal{V}$ . Ιδιαίτερα:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 3$$

Παρατηρούμε ότι επειδή ο  $\mathcal{V}$  είναι υπόχωρος του  $\mathbb{R}^3$  και  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ , θα έχουμε:  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ .

(β) Αν  $k = 1$ , τότε τα διανύσματα  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ , και  $\vec{z}$  είναι γραμμικά εξαρτημένα και έχουμε:

$$\vec{x} = (1, 1, -1), \quad \vec{y} = (0, 1, 1), \quad \vec{z} = (1, 1, -1)$$

δηλαδή  $\vec{x} = \vec{z}$ , και τότε:

$$\mathcal{V} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Προφανώς τα διανύσματα  $\vec{x}$  και  $\vec{y}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν  $\lambda_1 \vec{x} + \lambda_2 \vec{y} = \vec{0}$ , τότε θα έχουμε  $\lambda_1(1, 1, -1) + \lambda_2(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$  και άρα  $(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0)$  από όπου προκύπτει άμεσα ότι  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Επομένως τα διανύσματα  $\vec{x}$  και  $\vec{y}$  αποτελούν βάση του  $\mathcal{V}$  και ιδιαίτερα

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$$

(γ) Αν  $k = -\frac{1}{2}$ , τότε τα διανύσματα  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ , και  $\vec{z}$  είναι γραμμικά εξαρτημένα και έχουμε:

$$\vec{x} = \left(-\frac{1}{2}, 1, -1\right), \quad \vec{y} = \left(0, -\frac{1}{2}, 1\right), \quad \vec{z} = \left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

Ο πίνακας  $A$  τότε παίρνει την μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow -2\Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow -2\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow -2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 2\Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow -\frac{1}{3}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Θεωρώντας τα διανύσματα

$$\vec{u} = (1, 0, -2) \quad \text{και} \quad \vec{v} = (0, 1, -2)$$

έπεται ότι

$$\mathcal{V} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Επειδή όπως προκύπτει άμεσα τα διανύσματα  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έπεται ότι το σύνολο  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  είναι μια βάση του  $\mathcal{V}$ . Ιδιαίτερα:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$$

### 3. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Αν  $k \neq 1$  και  $k \neq -\frac{1}{2}$ , τότε τα διανύσματα  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ , και  $\vec{z}$  αποτελούν ήδη βάση του  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ .

(β) Αν  $k = 1$ , τότε  $\vec{x} = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{y} = (0, 1, 1)$ , και θεωρούμε το διάνυσμα  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Επειδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

έπεται ότι τα διανύσματα  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  και  $\vec{e}_3$  αποτελούν μια βάση του  $\mathbb{R}^3$  η οποία συμπληρώνει τη βάση  $\{\vec{x}, \vec{y}\}$  του  $\mathcal{V}$ .

(γ) Θεωρούμε τη βάση  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  του  $\mathcal{V}$ , όπου  $\vec{u} = (1, 0, -2)$ , και  $\vec{v} = (0, 1, -2)$ . Θεωρούμε το διάνυσμα  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Επειδή:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

έπεται ότι τα διανύσματα  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  και  $\vec{e}_3$  αποτελούν μια βάση του  $\mathbb{R}^3$  η οποία συμπληρώνει τη βάση  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  του  $\mathcal{V}$ .

### 4. Τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα βάση του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνον αν $k \neq 1, -\frac{1}{2}$ .

Θα έχουμε:

$$(1, 1, 1) = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} \implies (1, 1, 1) = a(k, 1, -1) + b(0, k, 1) + c(1, k, -1) \implies$$

$$\implies (1, 1, 1) = (ak + ck, a + bk + ck, -a + b - c) \implies \begin{cases} ak + ck = 1 \\ a + bk + ck = 1 \\ -a + b + c = 1 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Επειδή ο πίνακας του συστήματος  $(\Sigma)$  με αγνώστους τα  $a, b, c$  είναι ο ανόστροφος

$${}^t A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & k & k \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

του  $A$  ο οποίος είναι αντιστρέψιμος διότι  $|{}^t A| = |A| = -2(k-1)(k + \frac{1}{2})$ , έπεται ότι το  $(\Sigma)$  είναι σύστημα Cramer και άρα έχει μοναδική λύση, η οποία δίνεται από τους γνωστούς τύπους:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k}{2k+1}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k-1}{2k+1}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{k^2+1}{(k-1)(2k+1)}$$

Άρα:

$$(1, 1, 1) = \frac{k}{2k+1} \vec{x} + \frac{k-1}{2k+1} \vec{y} - \frac{k^2+1}{(k-1)(2k+1)} \vec{z}$$