

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΛΥΣΗ ΠΡΟΧΕΙΡΗΣ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑΣ 8

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 17 Δεκεμβρίου 2021

Πρόχειρη Δοκιμασία. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z, w) = (x + z, y + w)$$

- (1) Να βρεθεί ο πίνακας A της f ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ και $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ των \mathbb{R}^4 και \mathbb{R}^2 αντίστοιχα.
- (2) Να βρεθεί μια βάση για τον πυρήνα $\text{Ker}(f)$ και μια βάση για την εικόνα $\text{Im}(f)$ της f .
- (3) Να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας Q και ένας αντιστρέψιμος 4×4 πίνακας P έτσι ώστε:

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } r = \mathbf{r}(A)$$

Λύση. (1) Θα έχουμε:

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0, 0, 0) = (1, 0) = \vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$$

$$f(\vec{e}_2) = f(0, 1, 0, 0) = (0, 1) = \vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2$$

$$f(\vec{e}_3) = f(0, 0, 1, 0) = (1, 0) = \vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$$

$$f(\vec{e}_4) = f(0, 0, 0, 1) = (0, 1) = \vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2$$

Επομένως:

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (2) Έστω $(x, y, z, w) \in \text{Ker}(f)$ και επομένως $f(x, y, z, w) = \vec{0} = (0, 0)$. Τότε $(x + z, y + w) = (0, 0)$, δηλαδή $x + z = 0$ και $y + w = 0$. Προφανώς τότε $z = -x$ και $w = -y$, και επομένως

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid z = -x \text{ και } w = -y\} = \{(x, y, -x, -y) \in \mathbb{R}^4 \mid z = -x \text{ και } w = -y\} = \\ &= \{x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1) \rangle \end{aligned}$$

Προφανώς τα διανύσματα $\vec{e}'_3 = (1, 0, -1, 0)$ και $\vec{e}'_4 = (0, 1, 0, -1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επομένως αποτελούν μια βάση του $\text{Ker}(f)$.

Συμπληρώνουμε τη βάση $\{\vec{e}'_3, \vec{e}'_4\}$ σε μια βάση

$$\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{e}'_2 = (1, 0, 0, 0), \vec{e}'_3 = (1, 0, -1, 0), \vec{e}'_4 = (0, 1, 0, -1)\}$$

του \mathbb{R}^4 . Το σύνολο \mathcal{B}' είναι βάση του \mathbb{R}^4 , διότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε τότε ότι τα διανύσματα $f(\vec{e}'_1)$ και $f(\vec{e}'_2)$ αποτελούν μια βάση \mathcal{C}' της $\text{Im}(f)$. Υπολογίζουμε:

$$\vec{e}'_1 := f(\vec{e}'_1) = f(1, 0, 0, 0) = (1, 0) = \vec{e}_1 \quad \text{και} \quad \vec{e}'_2 := f(\vec{e}'_2) = f(0, 1, 0, 0) = (0, 1) = \vec{e}_2$$

Έτσι μια βάση της εικόνας $\text{Im}(f)$ είναι η

$$\mathcal{C}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \mathcal{C}$$

Ιδιαίτερα προκύπτει ότι η βαθμίδα της f είναι

$$\mathbf{r}(f) = 2$$

- (3) Θα προσδιορίσουμε τον πίνακα $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$ της f ως προς το ζευγάρι βάσεων \mathcal{B}' και \mathcal{C}' . Επειδή $\mathbf{r}(f) = 2$, από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = (I_2 \quad O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πράγματι:

$$f(\vec{e}'_1) = \vec{e}'_1 = 1\vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2$$

$$f(\vec{e}'_2) = \vec{e}'_2 = 0\vec{e}'_1 + 1\vec{e}'_2$$

$$f(\vec{e}'_3) = \vec{0} = 0\vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2$$

$$f(\vec{e}'_4) = \vec{0} = 0\vec{e}'_1 + 0\vec{e}'_2$$

από όπου προκύπτει ο πίνακας $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$.

Επειδή \mathcal{B} είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^4 , ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ από τη βάση \mathcal{B} στην βάση \mathcal{B}' , αποτελείται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων της βάσης \mathcal{B}' οι οποίες είναι οι στήλες του πίνακα $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$:

$$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και επειδή \mathcal{C} είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 , ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$ από τη βάση \mathcal{C} στην βάση \mathcal{C}' , αποτελείται από τις συνιστώσες των διανυσμάτων της βάσης \mathcal{C}' οι οποίες είναι οι στήλες του πίνακα $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$:

$$Q = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επαληθεύουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$