ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Λυση Προχειρης Δοκιμασιας 9

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html

Παρασκευή 14 Ιανουαρίου 2022

Πρόχειρη Δοκιμασία. *Για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ να λυθεί το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:*

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x + \lambda y - z = 2 \\ 2x - y + \lambda z = 5 \\ x + 10y - 6z = \mu \end{cases}$$

Λύση. *Ο πίνακας του συστήματος (Σ) είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ \mu \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 \\ 0 & 10-\lambda & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-2\lambda & \lambda+2 \\ 10-\lambda & -5 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda - 3)(\lambda + 5)$$

(1) *Αν $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -5$ έχουμε $|A| \neq 0$ και άρα το (Σ) είνα σύστημα Cramer. Συνεπώς έχουμε μοναδική λύση:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ 5 & -1 & \lambda \\ \mu & 10 & -6 \end{vmatrix}}{(\lambda-3)(\lambda+5)} = \frac{\mu\lambda^2 + 10\lambda - (\mu + 38)}{(\lambda-3)(\lambda+5)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & \lambda \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix}}{(\lambda-3)(\lambda+5)} = \frac{\lambda(2-\mu) - 2\mu - 1}{(\lambda-3)(\lambda+5)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{(\lambda-3)(\lambda+5)} = \frac{\lambda(5-2\mu) - \mu - 8}{(\lambda-3)(\lambda+5)}$$

(2) *Έστω $\lambda = 3$. Τότε έχουμε το σύστημα*

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ x + 10y - 6z = \mu \end{cases}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ \mu \end{pmatrix}$$

Η βαθμίδα του πίνακα A είναι $\mathbf{r}(A) = 2$ διότι υπάρχει μια ελάσσονα ορίζουσα τάξης δύο διαφορετική του μηδενός:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

και η μοναδική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 3 η οποία πλαισιώνει την Δ είναι ίση με την $|A| = 0$. Στην συνέχεια εξετάζουμε τη βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα $(A|B)$. Έχουμε:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \mu \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & \mu - 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 1 \end{pmatrix}$$

(α΄) *Αν $\mu \neq 1$, τότε $\mu - 1 \neq 0$, και τότε ο παραπάνω πίνακας είναι ο*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{r}(A|B) = 3$$

διότι ο πίνακας $(A|B)$ έχει την ακόλουθη μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & \mu - 1 \end{vmatrix} = -7(\mu - 1) \neq 0$$

και δεν υπάρχουν ελλάσονες ορίζουσες τάξης 4. Έτσι θα έχουμε $\mathbf{r}(A) = 2 \neq 3 = \mathbf{r}(A|B)$ και το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.

(β΄) *Αν $\mu = 1$, τότε ο παραπάνω πίνακας είναι ο*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{r}(A|B) = 2$$

διότι ο πίνακας $(A|B)$ έχει την ακόλουθη μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

και όλες οι ελλάσονες ορίζουσες τάξης 3 που την περιβάλλουν είναι ίσες με μηδέν. Επομένως το σύστημα (Σ) είναι συμβιβαστό αφού $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(A|B)$. Σε αυτή την περίπτωση, οι παραπάνω πράξεις επί των γραμμών του $(A|B)$ δείχνουν ότι το (Σ) είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$A'X = B'$$

όπου:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Τότε έχουμε

$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ -7y + 5z = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{7} + \frac{5}{7}z \quad \Longrightarrow \quad x = 2 + z - 3\left(-\frac{1}{7} + \frac{5}{7}z\right) = \frac{17}{7} - \frac{8}{7}z$$

Θέτουμε $z = t \in \mathbb{R}$. Τότε η γενική λύση του (Σ) είναι

$$\begin{cases} x = \dfrac{17}{7} - \dfrac{8}{7}t \\[2ex] y = -\dfrac{1}{7} + \dfrac{5}{7}t \\[2ex] z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Εναλλακτικά επιλέγοντας την ελάσσονα ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

θα μπορούσαμε να λύσουμε το (Σ), *ως σύστημα Cramer με αγνώστους τα* x *και* y, *δίνοντας αυθαίρετες τιμές στο* z.

(3) *Έστω* $\lambda = -5$. *Τότε έχουμε το σύστημα*

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} x - 5y - z = 2 \\ 2x - y - 5z = 5 \\ x + 10y - 6z = \mu \end{cases}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ \mu \end{pmatrix}$$

Η βαθμίδα του πίνακα A *είναι* $\mathbf{r}(A) = 2$ *διότι υπάρχει μια ελάσσονα ορίζουσα τάξης δύο διαφορετική του μηδενός:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

Για τη βαθμίδα του επαυξημένου $(A|B)$, *θα έχουμε:*

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -5 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \mu \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & 15 & -5 & \mu - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{15}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \frac{1}{9}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{\mu-2}{15} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9\mu-33}{135} \end{pmatrix}$$

(α΄) *Αν* $\mu \neq \frac{11}{3}$, *τότε* $\frac{9\mu-33}{135} \neq 0$ *και άρα* $\mathbf{r}(A|B) = 3$, *διότι ο παραπάνω πίνακας έχει την ακόλουθη μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης* 3*:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{9\mu-33}{135} \end{vmatrix} = \frac{9\mu - 33}{135} \neq 0$$

και δεν υπάρχουν ελλάσονες ορίζουσες τάξης 4. *Έτσι θα έχουμε* $2 = \mathbf{r}(A) \neq 3 = \mathbf{r}(A|B)$ *και το σύστημα* (Σ) *είναι αδύνατο.*

(β΄) *Αν* $\mu = \frac{11}{3}$, *τότε οι παραπάνω πράξεις επί των γραμμών του* $(A|B)$ *δείχνουν ότι το* (Σ) *είναι ισοδύναμο με το σύστημα*

$$A'X = B'$$

όπου:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B' = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$$

και ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$(A'|B') = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{r}(A'|B') = 2$$

διότι ο $(A'|B')$ *περιέχει την μη-μηδενική ελάσσονα ορίζουσα τάξης* 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

και όλες οι ελάσσονες ορίζουσες τάξης 3 *οι οποίες την περιβάλλουν είναι ίσες με* 0. *Έτσι* $\mathbf{r}(A') = 2 = \mathbf{r}(A'|B')$, *και το* (Σ) *είναι συμβιβαστό. Για τη γενική λύση του συστήματος, θα έχουμε:*

$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ \\ y - \dfrac{1}{3}z = \dfrac{1}{9} \end{cases} \implies \quad y = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}z \implies \quad x = 2 + z - 3\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}z\right) = \frac{5}{3}$$

Θέτουμε $z = t \in \mathbb{R}$. *Τότε η γενική λύση του* (Σ) *είναι*

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ \\ y = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3}t \\ \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Συνοψίζοντας δείξαμε ότι:

(1) *Το* (Σ) *έχει μοναδική λύση αν και μόνον αν* $\lambda \neq 3$ *και* $\lambda \neq -5$, *και τότε η μοναδική λύση είναι:*

$$\begin{cases} x \ = \ \dfrac{\mu\lambda^2 + 10\lambda - (\mu + 38)}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)} \\ \\ y \ = \ \dfrac{\lambda(2 - \mu) - 2\mu - 1}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)} \\ \\ z \ = \ \dfrac{\lambda(5 - 2\mu) - \mu - 8}{(\lambda - 3)(\lambda + 5)} \end{cases}$$

(2) *Αν* $\lambda = 3$, *τότε:*

  (α΄) *Αν* $\mu \neq 1$, *τότε το* (Σ) *είναι αδύνατο.*

  (β΄) *Αν* $\mu = 1$, *τότε το* (Σ) *έχει άπειρες λύσεις:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{17}{7} - \dfrac{8}{7}t \\ \\ y = -\dfrac{1}{7} + \dfrac{5}{7}t \\ \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(3) *Αν Αν* $\lambda = -5$, *τότε:*

  (α΄) *Αν* $\mu \neq \frac{11}{3}$, *τότε το* (Σ) *είναι αδύνατο.*

  (β΄) *Αν* $\mu = \frac{11}{3}$, *τότε το* (Σ) *έχει άπειρες λύσεις:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ \\ y = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3}t \\ \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$