

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html>

Παρασκευή 14 Οκτωβρίου 2022

Υπενθυμίζουμε ότι \mathbb{K} συμβολίζει ένα σώμα, συνήθως ένα εκ των \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} . Το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} συμβολίζεται με $M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Για λόγους απλότητας, το σύνολο όλων τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} συμβολίζεται με $M_n(\mathbb{K})$.

Ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας συμβολίζεται με O και ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας συμβολίζεται με I_n .

Άσκηση 1. Να γράψετε αναλυτικά τον 6×6 πίνακα $A = (a_{ij})$ όπου $a_{ij} = \min\{i, j\} + i - j$.

Άσκηση 2. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Να εκτελεστούν, όπου είναι δυνατόν, οι ακόλουθοι πολλαπλασιασμοί πινάκων:

$$A \cdot B, \quad B \cdot A, \quad A \cdot C, \quad C \cdot A, \quad B \cdot C, \quad C \cdot D, \quad D \cdot C, \quad C \cdot E, \quad E \cdot E$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} καλείται **αντιστρέψιμος**, αν υπάρχει $n \times n$ πίνακας B με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} έτσι ώστε $AB = I_n = BA$. Σ' αυτή την περίπτωση ο πίνακας B είναι μοναδικός, συμβολίζεται με A^{-1} και καλείται ο **αντίστροφος** του πίνακα A .

Άσκηση 3. Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

να δειχθεί ότι οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι, να βρεθούν οι πίνακες A^{-1} και B^{-1} , και να δειχθεί ότι:

$$AB = BA$$

Άσκηση 4. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να προσδιοριστεί 3×3 πίνακας X , ο οποίος να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$A + 3X = 2(X - B)$$

Άσκηση 5. Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, θεωρούμε τους πίνακες:

$$E_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), \quad \text{όπου} \quad (E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = i \text{ \& } l = j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Με άλλα λόγια ο πίνακας E_{ij} είναι ο $m \times n$ πίνακας ο οποίος έχει κάθε στοιχείο του ίσο με 0 εκτός από το στοιχείο του στη θέση (i, j) το οποίο είναι ίσο με 1.

(1) Ναδειχθεί ότι για κάθε $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ ισχύει ότι:

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij}$$

(2) Για κάθε πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ να προσδιοριστούν οι πίνακες

$$\begin{aligned} A \cdot E_{ij}, & \quad \text{όπου} \quad E_{ij} \in M_{n \times r}(\mathbb{K}) \\ E_{ij} \cdot A, & \quad \text{όπου} \quad E_{ij} \in M_{s \times m}(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , τότε ορίζονται οι δυνάμεις $A^n, \forall n \geq 0$, του A επαγωγικά ως εξής:

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, \quad \dots \quad A^{n+1} = A^n \cdot A$$

Ο πίνακας A^n καλείται η **n -οστή δύναμη** του A . Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$A^n \cdot A^m = A^{n+m}, \quad (A^n)^m = A^{nm}$$

Άσκηση 6. Να εξετασθεί αν ισχύει η ακόλουθη σχέση στο σύνολο $M_n(\mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} :

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Άσκηση 7. Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστεί ο πίνακας $A^{2018} \cdot B$.

Άσκηση 8. Να υπολογιστεί η n -οστή δύναμη A^n του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το **ίχνος** $\text{Tr}(A)$ ενός τετραγωνικού πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ ορίζεται να είναι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B), \quad \text{και} \quad \text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A)$$

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ο **ανάστροφος** ${}^t A$ ενός $m \times n$ πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ορίζεται να είναι ο $n \times m$ πίνακας ${}^t A \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$, όπου:

$$({}^t A)_{ij} = (A)_{ji}$$

Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \quad \text{και} \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$$

Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{K})$ καλείται **συμμετρικός** αν και μόνον αν ${}^tA = A$, δηλαδή ισχύει ότι: $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Άσκηση 9. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} . Να δειχθεί ότι:

$$\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$$

Ως εφαρμογή να δειχθεί ότι για κάθε αντιστρέψιμο $n \times n$ πίνακα P και κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει ότι:

$$\text{Tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \text{Tr}(A)$$

Άσκηση 10. Να εξετασθεί αν για τυχόντες τετραγωνικούς πίνακες $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B) \quad \text{και} \quad \text{Tr}({}^tA) = \text{Tr}(A)$$

Άσκηση 11. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} . Να δειχθεί ότι:

$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$$

Άσκηση 12. Θεωρούμε τους $n \times 1$ πίνακες $A, B \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$.

(1) Να δειχθεί ότι:

$${}^tA \cdot B = {}^tB \cdot A$$

(2) Να δειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα ότι:

$$A \cdot {}^tB \neq B \cdot {}^tA$$

(3) Να δειχθεί ότι:

$$\text{Tr}(A \cdot {}^tB) = {}^tA \cdot B$$

(4) Να δειχθεί ότι:

$${}^tA \cdot A = 0 \quad \iff \quad A = O$$

(5) Να δειχθεί ότι:

$$A \cdot {}^tA = 0 \quad \iff \quad A = O$$

Άσκηση 13. (1) Αν $A \in M_n(\mathbb{K})$, να εξετασθεί αν ισχύει ότι: $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A$.

(2) Αν $A \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$, να δειχθεί ότι:

(α) Οι πίνακες $A \cdot {}^tA$ και ${}^tA \cdot A$ είναι συμμετρικοί.

(β) $\text{Tr}({}^tA \cdot A) = \text{Tr}(A \cdot {}^tA)$.

(γ) Ο αριθμός $\text{Tr}({}^tA \cdot A)$ είναι μη-αρνητικός και: $\text{Tr}({}^tA \cdot A) = 0 \iff A = O$.

Άσκηση 14. Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, να δειχθεί ότι $A^2 - 2A - 8I_2 = 0$. Επιπλέον να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο πίνακας A^{-1} .

Άσκηση 15. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} . Ναδειχθεί ότι¹:

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O$$

Να συμπεράνετε ότι:

$$\text{ο πίνακας } A \text{ είναι αντιστρέψιμος} \iff ad - bc \neq 0$$

και τότε:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \left(-A + (a + d)I_2 \right) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Άσκηση 16. Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Ας είναι $AT_n(\mathbb{K})$ (αντιστοίχως $KT_n(\mathbb{K})$) το σύνολο των άνω (αντιστοίχως κάτω) τριγωνικών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} .

Ναδειχθεί ότι η τομή $AT_n(\mathbb{K}) \cap KT_n(\mathbb{K})$ των δύο αυτών συνόλων ισούται με το σύνολο των διαγωνίων πινάκων.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας A καλείται **ταυτοδύναμος** αν $A^2 = A$. Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

είναι ταυτοδύναμος.

Άσκηση 17. (1) Ναδειχθεί ότι αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι ταυτοδύναμος, τότε και ο πίνακας $I_n - A$ είναι ταυτοδύναμος.

(2) Να βρεθούν όλοι οι ταυτοδύναμοι και αντιστρέψιμοι πίνακες.

(3) Υποθέτουμε ότι για τους πίνακες (κατάλληλων μεγεθών) A και B ισχύει ότι: $AB = A$ και $BA = B$. Ναδειχθεί ότι οι πίνακες A και B είναι ταυτοδύναμοι.

Άσκηση 18. (1) Αν ο $n \times n$ πίνακας P είναι ταυτοδύναμος, τότε ναδειχθεί ότι:

$$(2P - I_n)^2 = I_n$$

(2) Αν για τον $n \times n$ πίνακα A ισχύει ότι $A^2 = I_n$, τότε ναδειχθεί ότι ο πίνακας

$$\frac{1}{2}(A + I_n)$$

είναι ταυτοδύναμος.

Άσκηση 19. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι $A^4 = I_3$ και ακολούθως να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Στην συνέχεια να βρείτε τους πίνακες A^{-1} και A^{2017} .

Άσκηση 20. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Βρείτε τον πίνακα A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 21. Για κάθε $n \geq 1$, να βρείτε την n -οστή δύναμη του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

¹Ο αριθμός $a + d$ είναι το ίχνος $\text{Tr}(A)$ του A , και ο αριθμός $ad - bc$ καλείται **ορίζουσα** του A και συμβολίζεται με $|A|$ ή $\text{Det}(A)$.

Άσκηση 22. Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και ακολουθώντας να βρεθεί ο αντιστροφός του A^{-1} .

Άσκηση 23. Έστω A και B δύο $n \times n$ πίνακες και υποθέτουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε οι πίνακες $P^{-1}AP$ και $P^{-1}BP$ είναι διαγώνιοι. Να δειχθεί ότι: $AB = BA$.

Υπενθυμίζουμε ότι μια **σχέση** \mathcal{R} επί ενός συνόλου S είναι ένα υποσύνολο $\mathcal{R} \subseteq S \times S$ του καρτεσιανού γινομένου $S \times S$. Αν $s_1, s_2 \in S$, και $(s_1, s_2) \in \mathcal{R}$ θα γράφουμε: $s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2$, δηλαδή:

$$\forall s_1, s_2 \in S : s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2 \iff (s_1, s_2) \in \mathcal{R}$$

Μια σχέση \mathcal{R} επί του συνόλου S καλείται **σχέση ισοδυναμίας** αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$(1) \forall s \in S: s \sim_{\mathcal{R}} s. \quad (\text{Ανακλαστική ιδιότητα})$$

$$(2) \forall s_1, s_2 \in S: s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2 \implies s_2 \sim_{\mathcal{R}} s_1. \quad (\text{Συμμετρική ιδιότητα})$$

$$(3) \forall s_1, s_2, s_3 \in S: \begin{cases} s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2 \\ s_2 \sim_{\mathcal{R}} s_3 \end{cases} \implies s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_3. \quad (\text{Μεταβατική ιδιότητα})$$

Αν \mathcal{R} είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου S και δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θα συμβολίζουμε την \mathcal{R} με “ \sim ” και θα γράφουμε $s_1 \sim s_2$ αντί $s_1 \sim_{\mathcal{R}} s_2$.

Άσκηση 24. Δύο $n \times n$ πίνακες A και B καλούνται όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P έτσι ώστε $P^{-1}AP = B$. Να δειχθεί ότι ορίζοντας

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}) : A \sim B \iff \text{οι πίνακες } A \text{ και } B \text{ είναι όμοιοι}$$

αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας “ \sim ” στο σύνολο $M_n(\mathbb{K})$ όλων των $n \times n$ πινάκων υπεράνω του σώματος \mathbb{K} .

Άσκηση 25. Για κάθε $n \geq 1$, να βρεθεί η n -οστή δύναμη των πινάκων

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

όπου $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 26. Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντιστροφός του.

Άσκηση 27. Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Άσκηση 28. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ 0 & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & x & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας A καλείται **μηδενοδύναμος** αν υπάρχει θετικός ακέραιος k έτσι ώστε: $A^k = 0$. Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι μηδενοδύναμος.

Άσκηση 29. Έστω A και B δύο $n \times n$ πίνακες τέτοιοι ώστε ο πίνακας $I_n - (A \cdot B)^2$ να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι ο πίνακας $I_n - (B \cdot A)^2$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι

$$(I_n - (B \cdot A)^2)^{-1} = I_n + B \cdot (I_n - (A \cdot B)^2)^{-1} \cdot A \cdot B \cdot A$$

Άσκηση 30. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας για τον οποίο ισχύει ότι $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = 0$. Να δειχθεί ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = -A^4$$

Άσκηση 31. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Να δειχθεί ότι:

$$\text{ο πίνακας } I_n + AB \text{ είναι αντιστρέψιμος} \iff \text{ο πίνακας } I_n + BA \text{ είναι αντιστρέψιμος}$$

Άσκηση 32. Θεωρούμε τους $n \times n$ πίνακες A και B , και υποθέτουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει: $A + B = A \cdot B$. Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι: $A^{-1} + B^{-1} = I_n$.

Άσκηση 33. Έστω A, B δύο αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες έτσι ώστε ο πίνακας $A + B^{-1}$ να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι ο πίνακας $A^{-1} + B$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι:

$$(A^{-1} + B)^{-1} = A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}$$

Άσκηση 34. Να ευρεθούν όλοι οι πίνακες που μετατίθενται με τους πίνακες της μορφής:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(2) B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 35. Να προσδιοριστούν όλοι οι 2×2 ταυτοδύναμοι πίνακες.

Άσκηση 36. Να προσδιοριστούν όλοι οι 2×2 πίνακες A που υψούμενοι στο τετράγωνο είναι ίσοι με τον μηδενικό 2×2 πίνακα, δηλαδή όλοι οι 2×2 πίνακες A για τους οποίους ισχύει ότι $A^2 = O$.