

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΤΜΗΜΑ Β' (Μ-Ω)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2021/LAI2021.html>

Παρασκευή 5 Νοεμβρίου 2021

Άσκηση 1. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} , όπου $n \geq 2$.

Χρησιμοποιώντας ότι η ορίζουσα του A μπορεί να υπολογιστεί ως το ανάπτυγμα της κατά τα στοιχεία τυχούσας στήλης ή γραμμής και ότι η ορίζουσα του πίνακα δεν αλληλάζει αν σε μια γραμμή ή στήλη προσθέσουμε πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής ή στήλης αντιστοίχα, να δειχθούν τα ακόλουθα:

- (1) Αν ο πίνακας A έχει δύο διαδοχικές στήλες ίσες ή δύο γραμμές ίσες, τότε $|A| = 0$.
- (2) Αν στον πίνακα A εναλλάξουμε αμοιβαία δύο διαδοχικές στήλες ή γραμμές, τότε η ορίζουσα του πίνακα A αλληλάζει πρόσημο. Δηλαδή, αν $1 \leq k \leq n - 1$, τότε:

$$A \xrightarrow{\Sigma_k \leftrightarrow \Sigma_{k+1}} A' \implies |A'| = -|A|$$

- (3) Αν ο πίνακας A έχει δύο στήλες ίσες ή δύο γραμμές ίσες, τότε $|A| = 0$.

Άσκηση 2. Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} . Να δειχθεί ότι:

$$|A| = 0 \iff \text{είτε υπάρχει } \lambda \in \mathbb{K} : a = \lambda c \text{ και } b = \lambda d \text{ είτε υπάρχει } \mu \in \mathbb{K} : c = \mu a \text{ και } d = \mu b$$

Με άλλα λόγια, η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα είναι ίση με μηδέν αν και μόνον αν μία από τις δύο γραμμές είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της άλλης¹.

Άσκηση 3. Χωρίς να υπολογιστεί, να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

¹Το συμπέρασμα της Άσκησης εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε τις γραμμές με τις στήλες, δηλαδή: η ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα είναι ίση με μηδέν αν και μόνον αν μία από τις δύο στήλες του είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της άλλης

Άσκηση 5. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 6. Χωρίς να υπολογιστούν οι ορίζουσες, ναδειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \\ 3 & 33 & 333 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -11 & 111 \\ -2 & 22 & -222 \\ 3 & -33 & 333 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 7. Να υπολογιστεί η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ 1+2a & 1+2b & 1+2c \\ 1+3a & 1+3b & 1+3c \end{vmatrix}$$

Άσκηση 8. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Άσκηση 9. Αν α , β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \quad (\text{ορίζουσα VANDERMONDE τρίτης τάξης})$$

Άσκηση 10. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 + \alpha_1\beta_1 & 1 + \alpha_1\beta_2 & 1 + \alpha_1\beta_3 \\ 1 + \alpha_2\beta_1 & 1 + \alpha_2\beta_2 & 1 + \alpha_2\beta_3 \\ 1 + \alpha_3\beta_1 & 1 + \alpha_3\beta_2 & 1 + \alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}$.

Άσκηση 11. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2(x) & 1 & \cos^2(x) \\ \sin^2(y) & 1 & \cos^2(y) \\ \sin^2(z) & 1 & \cos^2(z) \end{vmatrix}$

Άσκηση 12. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η ορίζουσα $|A|$ του 4×4 πίνακα πραγματικών αριθμών:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 13. Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{K})$ ο οποίος ικανοποιεί την σχέση:

$$A^2 + 2 \cdot A = O$$

Να δείξετε ότι ο πίνακας $A + I_3$ είναι αντιστρέψιμος, να βρείτε τον $(A + I_3)^{-1}$, και να υπολογίσετε την ορίζουσα $|A|$ του A .

Άσκηση 14. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα \mathbb{K} .

- (1) Αν ο n είναι περιττός και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν πίνακες $A \in M_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε: $A^2 + I_n = O$.
- (2) Αν ο n είναι περιττός και $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες $A \in M_n(\mathbb{C})$ έτσι ώστε: $A^2 + I_n = O$.
- (3) Αν ο n είναι άρτιος και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι υπάρχουν πίνακες $A \in M_n(\mathbb{C})$ έτσι ώστε: $A^2 + I_n = O$.

Άσκηση 15. Θεωρούμε 2×2 πίνακες A και B με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K} και υποθέτουμε ότι:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} y & x-1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $x, y \in \mathbb{K}$. Να βρεθούν οι αριθμοί x, y . Αν ο πίνακας A είναι γνωστός, μπορεί να προσδιοριστεί ο πίνακας B ;

Άσκηση 16. Έστω A ένας αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ή \mathbb{R} ή \mathbb{C} . Αν ο n είναι περιττός, να δειχθεί ότι $|A| = 0$. Ακολουθώντας να δοθούν παραδείγματα αντισυμμετρικών 2×2 και 4×4 πινάκων με μη μηδενική ορίζουσα.

Άσκηση 17. Να ληθεί η εξίσωση
$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & i \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} = 0, \quad \text{όπου } i^2 = -1.$$

Άσκηση 18. Να υπολογισθεί η $n \times n$ ορίζουσα
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 19. Να υπολογισθεί η $n \times n$ ορίζουσα
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 20. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 21. Να υπολογισθεί η $n \times n$ ορίζουσα
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 22. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 23. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 24. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

Άσκηση 25. Να υπολογισθεί η $2n \times 2n$ ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \cdots & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 26. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του ακόλουθου $n \times n$ πίνακα A , όπου $x \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 27. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-n \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 28. Να λυθεί η εξίσωση ως προς x : $|A| = 0$, όπου A είναι ο ακόλουθος $n \times n$ πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & n-x \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 29. Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να έχει η ορίζουσα ενός 5×5 πίνακα της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix};$$

(Με «*» συμβολίζουμε αυθαίρετες τιμές στοιχείων του \mathbb{K}).

Η **ακολουθία Fibonacci** F_n , $n \geq 0$, είναι η ακολουθία φυσικών αριθμών η οποία ορίζεται ως εξής:

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_3 = 3, \quad F_4 = 5, \quad F_5 = 8, \quad F_6 = 13, \quad F_7 = 21, \quad F_8 = 34, \quad F_9 = 55$$

και κάθε όρος της, εκτός του μηδενικού, είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων, δηλαδή, $\forall n \geq 1$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Άσκηση 30. Ναδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$, η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

συμπίπτει με τον n -οστό όρο της ακολουθίας Fibonacci, δηλαδή: $|A_n| = F_n$, $\forall n \geq 1$.

Άσκηση 31. Έστω ότι x, y είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$$

Άσκηση 32. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 33. Έστω ότι x είναι ένας πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} a & x & x & \cdots & x & x \\ x & a & x & \cdots & x & x \\ x & x & a & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a & x \\ x & x & x & \cdots & x & a \end{pmatrix}$$

Η επόμενη Άσκηση αποτελεί γενίκευση της Άσκησης 33.

Άσκηση 34. Έστω ότι x, a_1, a_2, \dots, a_n είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & x & \cdots & x & a_n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 35. Έστω r_1, r_2, \dots, r_n θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 1+r_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+r_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+r_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+r_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+r_n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 36. Έστω ότι x, a_1, a_2, \dots, a_n είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x + a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x + a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x + a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x + a_n \end{pmatrix}$$

Άσκηση 37. Έστω ότι x, y είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & 0 & x \\ y & y & y & \cdots & y & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 38. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα με στοιχεία από το σώμα \mathbb{K}

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα $|V(x_1, x_2, \dots, x_n)|$ καλείται **ορίζουσα Vandermonde τάξης n** .