ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

$\boxed{\text{Τμημα } \mathbf{B'}}$ (Μ-Ω)

Ασκησεις - Φυλλαδιο 5

Διδασκων: Α. Μπεληγιάννης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraI2022/LAI2022.html

Παρασκευή 18 Νοεμβρίου 2022

Υπενθυμίσεις από τη Θεωρία

Υπενθυμίζουμε κάποια βασικά αποτελέσματα από τη θεωρία τα οποία μας διευκολύνουν στην μελέτη συνόλων γεννητόρων, γραμμικά ανξάρτητων υποσυνόλων, και βάσεων ενός διανυσματικού χώρου.

Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = n$. Σταθεροποιούμε μια βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{E}$.

Έστω ότι $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ είναι m το πλήθος διανύσματα του $\mathcal{E}$. Τότε γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων τηςε βάσης $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n \\
\vec{x}_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{2n}\vec{e}_n \\
&\vdots \\
\vec{x}_m &= a_{m1}\vec{e}_1 + a_{m2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

Θεωρούμε τον πίνακα $A = (a_{ij})$ των συντελεστών των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1. Έστω ότι A' είναι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα A:

$$A = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

και έστω τα διανύσματα[1] του $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1 &= a'_{11}\vec{e}_1 + a'_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a'_{1n}\vec{e}_n \\
\vec{y}_2 &= a'_{21}\vec{e}_1 + a'_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a'_{2n}\vec{e}_n \\
&\vdots \\
\vec{y}_m &= a'_{m1}\vec{e}_1 + a'_{m2}\vec{e}_2 + \cdots + a'_{mn}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

[1] Τα διανύσματα $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m$ έχουν προκύψει μετά την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πράξεψων στα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$.

Τότε:

(1) $$\left\langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m \right\rangle = \left\langle \vec{y}_1,\, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m \right\rangle$$

2. Το σύνολο διανυσμάτων $\vec{x}_1,\, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$^tA \cdot \Lambda = 0, \qquad \text{όπου} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

δηλαδή το ομογενές γραμμικό σύστημα ως προς $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$:

(2) $$(\Sigma) : \begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \cdots + a_{m1}\lambda_m = 0 \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{m2}\lambda_m = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + \cdots + a_{mn}\lambda_m = 0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση την μηδενική[2].

Ιδιαίτερα αν $m = n$, τότε το σύνολο διανυσμάτων $\left\{\vec{x}_1,\, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\right\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν $|A| \neq 0$.

3. Αν $\mathcal{E} = \mathbb{K}^n$, τότε τα **1.** και **2.** παίρνουν την ακόλουθη μορφή.

Τα διανύσματα $\vec{x}_1$, $\vec{x}$, $\cdots$, $\vec{x}_m$ είναι διατεταγμένες n-άδες:

$$\vec{x}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$$
$$\vec{x}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\vec{x}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$$

Αν

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

είναι η ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

τότε:

(3) $$\left\langle \vec{x}_1,\, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m \right\rangle = \left\langle \vec{y}_1,\, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_m \right\rangle$$

όπου:

$$\vec{y}_1 = (a'_{11}, a'_{12}, \cdots, a'_{1n})$$
$$\vec{y}_2 = (a'_{21}, a'_{22}, \cdots, a'_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\vec{y}_m = (a'_{m1}, a'_{m2}, \cdots, a'_{mn})$$

[2] Θα δούμε αργότερα ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν $m = \mathbf{r}(A)$, όπου $\mathbf{r}(A)$ είναι η **βαθμίδα** του πίνακα A, δηλαδή το πλήθος των οδηγών στην ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή του A ή ισοδύναμα το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών, ή ισοδύναμα γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A.

Επιπλέον το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν το ομογενές γραμμικό σύστημα (Σ), βλέπε παραπάνω, έχει μόνο τη μηδενική λύση.

Ιδιαίτερα, αν $m = n$, τότε το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν και μόνον αν $|A| \neq 0$.

4. Έστω $\mathcal{B}$ ένα υποσύνολο του $\mathcal{E}$. Τότε το υποσύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ αν και μόνον αν ικανοποιεί τις 2 από τις ακόλουθες 3 ιδιότητες:
(α΄) Το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
(β΄) Το σύνολο $\mathcal{B}$ παράγει τον χώρο $\mathcal{E}$.
(γ΄) Ισχύει ότι:

$$|\mathcal{B}| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \tag{4}$$

5. Έστω ότι το υποσύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ του $\mathcal{E}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι $m \leq n$ και το υποσύνολο $\mathcal{C}$ μπορεί να συμπληρωθεί σε μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$, δηλαδή υπάρχουν διανύσματα $\vec{x}_{m+1}, \cdots, \vec{x}_n$ έτσι ώστε το υποσύνολο $\mathcal{B}' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \cdots, \vec{x}_n\}$ να είναι βάση του $\mathcal{E}$.

Για να προσδιορίσουμε διανύσματα $\vec{x}_{m+1}, \cdots, \vec{x}_n$ έτσι ώστε το υποσύνολο

$$\mathcal{B}' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \cdots, \vec{x}_n\}$$

να είναι βάση του $\mathcal{E}$, εργαζόμαστε ως εξής:
Θεωρούμε τον πίνακα A των συνιστωσών των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_m$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

και αναζητούμε $n - m$ το πλήθος γραμμές

$$\begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}, \qquad k = m+1, m+2, \cdots, n$$

έτσι ώστε ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος. Τότε θέτοντας

$$\vec{x}_k = a_{k1}\vec{e}_1 + a_{k2}\vec{x}_{k2} + \cdots + a_{kn}\vec{e}_n, \qquad k = m+1, m+2, \cdots, n$$

από το 3 έπεται ότι το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \cdots, \vec{x}_n\}$ να είναι βάση του $\mathcal{E}$.

• Για τις λυσεις των ασκησεων που ακολουθουν θα εφαρμοζουμε ειτε τον ορισμο (συνολου γεννητορων, γραμμικης ανεξαρτησιας, βασης) ειτε καποιο απο τα παραπανω αποτελεσματα της Θεωριας.

Άσκηση 1. (1) *Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ και τον $\mathbb{Q}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^2_{\mathbb{Q}}$.*
Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων

$$\vec{x} = (3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) \quad \text{και} \quad \vec{y} = (7, 1 + 2\sqrt{2})$$

είναι γραμμικά εξαρτημένο στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ και γραμμικά ανεξάρτητο στον $\mathbb{Q}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2_{\mathbb{Q}}$.

(2) *Θεωρούμε τον $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2$ τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}$ και τον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2$ τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.*
Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων
$$\vec{x} = \big(1 - i,\, i\big) \quad \text{και} \quad \vec{y} = \big(2,\, -1 + i\big)$$
είναι γραμμικά εξαρτημένο στον $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}$ και γραμμικά ανεξάρτητο στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.

Άσκηση 2. *Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων*
$$\mathcal{C} = \big\{\vec{x}_1 = (1,\, 2,\, 1),\ \vec{x}_2 = (1,\, 1,\, 0),\ \vec{x}_3 = (0,\, 2,\, 1)$$
είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$ και ακολούθως να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{x} = (3, 2, 0)$ ως τη βάση $\mathcal{C}$.

Άσκηση 3. *Να προσδιοριστεί μια βάση και η διάσταση του $\mathbb{R}$-υποχώρου*
$$\mathcal{V} = \big\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a - b,\ d = a + b\big\} \ \subseteq\ \mathbb{R}^4$$

Άσκηση 4. *Έστω $a \in \mathbb{K}$ και θεωρούμε το σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{K}^3$:*
$$\mathcal{C} = \big\{\vec{x} = (a^2, 0, 1),\ \vec{y} = (0, a, 2),\ \vec{z} = (1, 0, 1)\big\}$$
(1) *Να προσδιοριστούν όλες οι τιμές του $a \in \mathbb{K}$, για τις οποίες το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{C}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*
(2) *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου*
$$\mathcal{V} = \langle \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\,\rangle$$
(3) *Να συμπληρωθεί η βάση που βρέθηκε στο (2) σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$.*

Άσκηση 5. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$:*
$$\vec{x} = (1, -2, k), \quad \vec{y} = (3, 0, -2), \quad \vec{z} = (2, -1, -5)$$
(1) *Να βρεθεί για ποιές τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*
(2) *Για τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, για τις οποίες τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, και $\vec{z}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, να βρεθεί μια σχέση γραμμικής εξάρτησης τους.*
(3) *Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου $\mathcal{V} = \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\,\rangle$.*
(4) *Να βρεθεί υπόχωρος $\mathcal{U}$ έτσι ώστε:*
$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

Άσκηση 6. *Θεωρούμε διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ και $\vec{x}$:*

(1)
$$\vec{e}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{e}_2(1, 1, 2), \quad \vec{e}_3 = (1, 2, 3) \quad \text{και} \quad \vec{x} = (6, 9, 14)$$
(2)
$$\vec{e}_1 = (2, 1, -3), \quad \vec{e}_2(3, 2, -5), \quad \vec{e}_3 = (1, -1, 1) \quad \text{και} \quad \vec{x} = (6, 2, -7)$$
(3)
$$\vec{e}_1 = (1, 2, -1, -2), \quad \vec{e}_2(2, 3, 0, -1), \quad \vec{e}_3 = (1, 2, 1, 4), \quad \vec{e}_4 = (1, 3, -1, 0) \quad \text{και} \quad \vec{x} = (7, 14, -1, 2)$$

Να δειχθεί, σε κάθε περίπτωση, ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\big\}$ είναι βάση και να βρεθούν οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{x}$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Άσκηση 7. *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ακολούθως να συμπληρωθεί το σύνολο $\mathcal{B}$ σε μια βάση του αντίστοιχου χώρου:*

(1)
$$\vec{\epsilon}_1 = (2,2,7,-1), \quad \vec{\epsilon}_2 = (3,-1,2,4), \quad \vec{\epsilon}_3 = (1,1,3,1)$$
(2)
$$\vec{\epsilon}_1 = (2,3,-4,-1), \quad \vec{\epsilon}_2 = (1,-2,1,3)$$

Άσκηση 8. *Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ακολούθως να συμπληρωθεί το σύνολο $\mathcal{B}$ σε μια βάση του αντίστοιχου χώρου:*

(1)
$$\vec{\epsilon}_1 = (4,3,-1,1,1), \quad \vec{\epsilon}_2 = (2,1,-3,2,-5), \quad \vec{\epsilon}_3 = (1,-3,0,1,-2), \quad \vec{\epsilon}_4 = (1,5,2,-2,6)$$
(2)
$$\vec{\epsilon}_1 = (2,3,5,-4,1), \quad \vec{\epsilon}_2 = (1,-1,2,3,5)$$

Άσκηση 9. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$:*
$$\vec{x} = (3,9,-4,-2), \quad \vec{y} = (1,-2,0,3), \quad \vec{z} = (2,3,0,-1), \quad \vec{w} = (2,-1,2,1)$$

(1) *Να βρεθεί ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, και $\vec{w}$.*
(2) *Να εξετασθεί αν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, και $\vec{w}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*
(3) *Αν τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα, να βρεθεί μια σχέση γραμμική εξάρτησης μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, και $\vec{w}$.*
(4) *Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου $\mathcal{V}$.*
(5) *Να βρεθεί μια βάση του $\mathbb{R}^4$ η οποία περιέχει μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}$.*
(6) *Να βρεθεί υποχωρος $\mathcal{U}$ του $\mathbb{R}^4$ έτσι ώστε:*
$$\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

Άσκηση 10. *Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$ και θεωρούμε τα διανύσματα του $\mathbb{K}_2[x]$:*
$$P(x) = -1 + x + 3x^2, \quad Q(x) = 5 - 2x + 9x^2, \quad R(x) = 1 - \lambda x + 2\lambda x^2$$
Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου
$$\big\langle P(x),\, Q(x),\, R(x) \big\rangle$$
η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{K}_2[x]$.

Άσκηση 11. *Έστω P ένας σταθερός αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο:*
$$\mathcal{V}(P) = \big\{ A \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid \text{ο πίνακας } P^{-1}AP \text{ είναι διαγώνιος} \big\}$$
Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{V}(P)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathsf{M}_3(\mathbb{R})$ και ακολούθως να βρείτε μια βάση του.

Άσκηση 12. *Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, θεωρούμε τις συναρτήσεις:*
$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \sin(x), \quad f_3(x) = \cos(x)$$
Να δειχθεί ότι το σύνολο συναρτήσεων $\big\{ f_1,\, f_2,\, f_3 \big\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Άσκηση 13. *Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ όλων των συναρτήσεων $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$, θεωρούμε τις συναρτήσεις:*
$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad \cdots, \quad f_n(x) = x^n$$
Να δειχθεί ότι το σύνολο συναρτήσεων $\big\{ f_0,\, f_1,\, f_2,\, \cdots,\, f_n \big\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Να συμπεράνετε ότι ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ έχει άπειρη διάσταση.

Παρατήρηση. *Έστω $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ το υποσύνολο του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ το οποίο αποτελείται από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε τότε ότι το $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ έχει άπειρη διάσταση, όπως μποριούμε να δούμε από την παραπάνω Άσκηση διότι, $\forall n \geq 1$, το σύνολο συνεχών συναρτήσεων $\big\{f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n\big\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Άσκηση 14. *Στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ όλων των συναρτήσεων $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$, θεωρούμε τις συναρτήσεις:*

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_1(x) = e^x, \qquad f_2(x) = e^{2x}, \qquad f_3(x) = e^{3x}$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο συναρτήσεων $\big\{f_1,\ f_2,\ f_3\big\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Άσκηση 15. *Έστω M ένας σταθερός 2×2 πίνακας πραγματικών αριθμών. Να δείξετε ότι το σύνολο*

$$\mathcal{V}(M) = \big\{A \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AM = MA\big\}$$

όλων των 2×2 πινάκων οι οποίοι μετατίθενται με τον M είναι ένας υπόχωρος του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$. Αν

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

να βρείτε μια βάση του $\mathcal{V}(M)$.

Άσκηση 16. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{V} = \langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$\vec{x} = (1,1,1,a), \quad \vec{y} = (1,0,1,b), \quad \vec{z} = (-2,2,-2,c) \ \in \ \mathbb{R}^4$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 17. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{V} = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα*

$$\vec{u} = (0,1,2), \quad \vec{v} = (0,-1,2), \quad \vec{w} = (0,3,4)$$

η οποία να επεκταθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 18. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n\}$$

είναι βάση του $\mathcal{E}$.

(1) *Να δείξετε ότι τότε το σύνολο*

$$\mathcal{C} = \big\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i + \lambda \vec{e}_j, \cdots, \vec{e}_n\big\}$$

είναι βάση του $\mathcal{E}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και $i \neq j$.

(2) *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α΄) *Το σύνολο*

$$\mathcal{D} = \big\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \cdots,\ \vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n,\ \vec{e}_n + \vec{e}_1\big\}$$

είναι βάση του $\mathcal{E}$.

(β΄) *Το n είναι περιττός.*

Άσκηση 19. *Έστω τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$:*

$$\vec{x}_1 = (1,1,0,\cdots,0), \quad \vec{x}_2 = (0,1,1,0\cdots,0), \quad \cdots, \quad \vec{x}_n = (1,0\cdots,0,1)$$

Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}}\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ του υπόχωρου ο οποίος παράγεται απο τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

Άσκηση 20. *Έστω* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *και*

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\big\}$$

Να βρεθεί η διάσταση $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$.

Άσκηση 21. *Έστω* $\vec{x} = (2,1,4,3), \vec{y} = (2,1,2,0) \in \mathbb{R}^4$. *Να δειχθεί ότι το σύνολο διανυσμάτων* $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο και να βρεθούν δύο διανύσματα* $\vec{z}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\big\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\big\}$ *να αποτελεί βάση του* $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 22. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου* $\langle A, B, \Gamma, \Delta\rangle$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

του $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, *και ακολούθως η βάση αυτή να συμπληρωθεί σε μια βάση του* $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

Άσκηση 23. *Να βρεθεί μια βάση του υπόχωρου*

$$\mathcal{V} = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4\big\}$$

η οποία περιέχει το διάνυσμα $(1,0,1,0)$ *ηαι η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση του* $\mathbb{K}^4$.

Αν $\mathcal{W}$ *είναι ο υπόχωρος*

$$\mathcal{W} = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\big\}$$

ποιά είναι η διάσταση των υπόχωρων $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ *και* $\mathcal{V} + \mathcal{W}$;

Άσκηση 24. *Έστω* $\mathcal{V} = \big\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5 \big\rangle$ *ο υπόχωρος του* $\mathbb{R}^4$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$\vec{x}_1 = (1,0,0,-1), \quad \vec{x}_2 = (2,1,1,0), \quad \vec{x}_3 = (1,1,1,1), \quad \vec{x}_4 = (1,2,3,4), \quad \vec{x}_5 = (0,1,2,3)$$

Να βρεθεί ένας υπόχωρος $\mathcal{U}$ *του* $\mathbb{R}^4$ *έτσι ώστε:*

$$\mathbb{R}^4 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

Άσκηση 25. *Έστω* $\mathcal{V} = \big\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5 \big\rangle$ *ο υπόχωρος του* $\mathbb{R}^5$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$\vec{x}_1 = (1,1,1,1,0), \quad \vec{x}_2 = (1,1,-1,-1,-1), \quad \vec{x}_3 = (2,2,0,0,-1), \quad \vec{x}_4 = (1,1,5,5,2), \quad \vec{x}_5 = (1,-1,-1,0,0)$$

Να βρεθεί ένας υπόχωρος $\mathcal{U}$ *του* $\mathbb{R}^5$ *έτσι ώστε:*

$$\mathbb{R}^5 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$$

Άσκηση 26. *Στον* $\mathbb{K}$*-διανυσματικό χώρο* $\mathbb{K}_4[x]$ *θεωρούμε τον υπόχωρο*

$$\mathcal{V} = \big\langle P(x), Q(x), R(X) \big\rangle$$

όπου:

$$P(x) = x + x^2 + x^4, \qquad Q(x) = x + 2x^2 - x^4, \qquad R(x) = 2x + 6x^4$$

Να βρεθεί μια βάση του $\mathcal{V}$ *η οποία να συμπληρωθεί σε μια βάση του* $\mathbb{K}_4[x]$.

Άσκηση 27. *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Να βρεθεί η διάσταση* $\dim_{\mathbb{K}}\langle \vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4\rangle$ *του υπόχωρου ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα*

$$\vec{A}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + \vec{e}_5\ ,$$
$$\vec{A}_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 + 8\vec{e}_5\ ,$$
$$\vec{A}_3 = 6\vec{e}_1 + 17\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 + 10\vec{e}_4 + 22\vec{e}_5\ ,$$
$$\vec{A}_4 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4\ .$$

η οποία στη συνέχεια να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^5$.

Άσκηση 28. *Να προσδιορισθεί μια βάση του χώρου $\Lambda(\Sigma)$ των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος:*

$$(\Sigma)\ \begin{cases} 4x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 29. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.*

(1) *Να δειχθεί ότι ο $\mathcal{E}$ μπορεί να θεωρηθεί και ως διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος των $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.*
(2) *Αν* $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{E} = n$, *να δειχθεί ότι* $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{E} = 2n$.

Άσκηση 30. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Έστω*

$$\vec{x}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n$$
$$\vec{x}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n$$
$$\vdots$$
$$\vec{x}_m = a_{1m}\vec{e}_1 + a_{2m}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nm}\vec{e}_n$$

m το πλήθος διανύσματα του $\mathcal{E}$, όπου $m \leq n$, και υποθέτουμε ότι:

$$a_{ij} = 0,\ \ \forall i > j,\quad 1 \leq i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n \qquad \textit{και} \qquad a_{ii} \neq 0,\ \ 1 \leq i \leq m$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.